数理統計学　中間試験

問１，問２，問３ をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

2004/05/18 服部哲弥

問１．　「下手な鉄砲も数打ちゃ当たる」ということわざがあるが，これを確率論的に説明せよ．

問２．　次の (a) または (b) のいずれか**一方**を解答せよ．（どちらを選んだか明記すること.）

選択肢 (a)． ρ を確率密度とする１次元分布の平均と分散をそれぞれ m と σ^2 とする（どちらも存在する分布を考える）．即ち，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = 1,\quad \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,dx = m,\quad \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2\rho(x)\,dx = \sigma^2.$$

このとき 任意の正の実数 $a > 0$ に対して $\displaystyle\int_{\left|\frac{x-m}{\sigma}\right| \geqq a} \rho(x)\,dx \leqq \frac{1}{a^2}$ が成り立つこと，即ち，この分布に関して $\displaystyle\left|\frac{x-m}{\sigma}\right| \geqq a$ が起こる確率は a^{-2} 以下であること，を証明せよ．

選択肢 (b)． X を非負値確率変数（必ず $X \geqq 0$ となる関数）とするとき，任意の a に対して

$$a\mathrm{P}[\ X \geqq a\ ] \leqq \mathrm{E}[\ X\ ]$$

となることを証明せよ．

問３．　かつて 1990 年頃 JR 東日本Ｙ駅のみどりの窓口（指定券前売窓口）では，一旦開始した購入客の「一列並び」（窓口毎に列を作らず，一列で順番を待って複数の窓口の空いたところに行く方法）をまもなくやめた．問い合わせに対する回答によると，やめた理由は

(i) 平均時間は変わらない,
(ii) 列が長く見えてＹ駅は混んでいると思われてしまう,
(iii) 誘導人員が確保できない,

ということであった．このうち第１点については講義で説明したように，適切な理由とは言えない．実際，Ｙ駅では 2000 年頃から一列並びを再開して，現在では定着している．第１点の誤解は指定券購入客にも多いであろう．この観点から,（第２点については前売り券購入客の理解が必要であることもふまえて,）JR 東日本は「一列並び」について客の理解を得るためにどう PR すればよいか，広報担当者の立場になって一段落程度の短い広告説明文を提案せよ．なお，客の大多数は確率論の専門家ではないしこの講義を聞いてもいない．

数理統計学　中間試験　**略解**　2003/05/25 服部哲弥

問１．　「下手な鉄砲も数打ちゃ当たる」ということわざを確率論的に説明せよ．

【教科書（小針，確率・統計入門，岩波書店）第１章練習問題 12 巻末解答.】ある回の射撃が的に当たるという事象は独立として，１回毎に当たる確率を p とすると，n 回撃って一度も当たらない確率は $(1-p)^n$ だから一度は当たる確率は $1-(1-p)^n$ となる．$p>0$ ならば $n\to\infty$ で $(1-p)^n\to 0$ となるから当たる確率は n が大きくなると 1 に近づく．下手ということを p は小さいけど 0 ではない，という意味にとるならば何回も撃てばいつかは当たる，というわけ．（服部注：でも，体を使う作業は繰り返すと疲れるから，p が n によらないというのは嘘だと思う....）

問２．　次の (a) または (b) のいずれか**一方**を解答せよ．

選択肢 (a)． 任意の正の実数 $a>0$ に対して $\displaystyle\int_{\left|\frac{x-m}{\sigma}\right|\geqq a}\rho(x)\,dx\leqq\frac{1}{a^2}$ を証明せよ．

【教科書第 2 章命題 2.4（チェビシェフの不等式）.】$\displaystyle\sigma^2=\int_{|x-m|\geqq a\sigma}(x-m)^2\rho(x)\,dx+\int_{|x-m|<a\sigma}(x-m)^2\rho(x)\,dx$ において，右辺第２項は正だからこれを除くと値は減り，第１項は積分範囲が $|x-m|\geqq a\sigma$ なので $\displaystyle\sigma^2\geqq\int_{|x-m|\geqq a\sigma}(a\sigma)^2\rho(x)\,dx=a^2\sigma^2\int_{\left|\frac{x-m}{\sigma}\right|\geqq a}\rho(x)\,dx.$

選択肢 (b)． $X\geqq 0$ とするとき，任意の a に対して $a\mathrm{P}[\,X\geqq a\,]\leqq\mathrm{E}[\,X\,]$ を証明せよ．

$X\geqq 0$ なのでその積分（期待値）は積分範囲にかかわらず非負なので，

$\mathrm{E}[\,X\,]=\mathrm{E}[\,X;X\geqq a\,]+\mathrm{E}[\,X;X<a\,]\geqq\mathrm{E}[\,X;X\geqq a\,].$

最右辺で，$X\geqq a$ なる範囲で積分するので

$\mathrm{E}[\,X\,]\geqq\mathrm{E}[\,a;X\geqq a\,]=a\mathrm{E}[\,1;X\geqq a\,]=a\mathrm{P}[\,X\geqq a\,].$

問３．　JR 東日本は「一列並び」について客の理解を得るためにどう PR すればよいか，広報担当者の立場になって一段落程度の短い広告説明文を提案せよ．

（採点基準：一列並びと窓口毎の列では，期待値は変わらないが，分散（正確には期待値から大きくずれる確率）が異なって，並列並びが分散が大きく一列並びが小さいことをふまえて,【並んでいられる時間（電車発車時刻や次の用事までの余裕）が決まっているときにせっかく並んだのに運悪く買い損なうという恐れが小さい】という点が明快であれば良い.）

答案から数点（含む一部抜粋・改変）

・混雑時，一列並びでスムーズに，皆様平等に切符をご購入いただけます．

・一列並びは待ち時間の予想の狂いが少なく，お急ぎのお客様にも便利でございます．

・JR ではお客様が先着順にご購入できますよう「一列並び」を採用しております．なお，窓口毎に並ぶ場合に比べて同数の窓口で対応いたしますので，平均の待ち時間は変わりません．今後とも Y 駅をよろしくお願い申し上げます．

・これまでの窓口ごとにお並び頂くのに比べて一列並びは長く待たされる可能性が少なくなることが知られております．また，列が長く混み合っているように見える場合がございますが，窓口の数は変わりませんので平均の待ち時間が長くなることもございません．

・待ち時間の平等化！〜お急ぎの方もそうでない方も〜

当駅みどりの窓口ではご購入時の順番待ちについて一列並びを採用しております．この方式はお客様にほぼ等しい待ち時間にて指定券をご購入いただけるため，お急ぎの場合も待ち時間過多によってお求めいただけないリスクが減ります．ご協力をよろしくお願い申し上げます．

・従来の窓口ごとに列を作る並び方は，予想以上の待ち時間のために予定の列車で出発できないということがございました．一列並びは空いた窓口からお並び頂いた順に受け付けますのでこのようなことが少なくなります．列が長く感じられることがございますが，窓口の数は従前より変わりませんので見た目より列が進みます．