数理統計学　中間試験

問 1，問 2，問 3 をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

2006/05/30 服部哲弥

問１．　有限集合 $\Omega = \{0, 1, \cdots, n\}$ 上の平均 μ の離散分布 Q について,

$$\sum_{k=0}^{n} (k-\mu)^2 \, Q(\{k\}) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \, Q(\{k\}) - \mu^2$$

を証明せよ. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(\{k\}) = 1$ と $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \, Q(\{k\}) = \mu$ は用いてよい.

問２．　かつて 1990 年頃 JR 東日本Ｙ駅のみどりの窓口では，いったん開始した購入客の「一列並び」をまもなくやめた．問い合わせに対する回答によると，やめた理由は

(i) 平均時間は変わらない,
(ii) 列が長く見えてＹ駅は混んでいると思われてしまう,
(iii) 誘導人員が確保できない,

ということであった．このうち第 1 点については講義および教科書で説明したように，適切な理由とは言えない．実際，Ｙ駅では 2000 年頃から一列並びを再開して，現在では定着している．第 1 点の誤解は指定券購入客にも多いであろう．この観点から，1990 年代に戻ったつもりになって，客の理解を得られない，と一列並びを渋るＹ駅の広報担当に代わり，一列並びについての客の理解を得るための広告説明文を提案せよ．なお，客の大多数は確率論の専門家ではないし，この講義を聞いてもいない．

問３．　X_1, X_2 は独立な確率変数で，それぞれ区間 $[0, 1]$ 上の一様分布に従うとする．このとき，確率 $\mathrm{P}[\, X_1 + X_2^2 < 1 \,]$ を計算せよ．

　ここで $[0, 1]$ 上の一様分布とは密度関数 ρ が $\rho(x) = 1$, $0 \leqq x \leqq 1$, で与えられる $\Omega = [0, 1]$ 上の連続分布をいう.

数理統計学　中間試験　**略解**　　2006/05/31 服部哲弥

問 1 (40).　有限集合 $\Omega = \{0, 1, \cdots, n\}$ 上の平均 μ の離散分布 Q について,

$$\sum_{k=0}^{n} (k-\mu)^2 \, Q(\{k\}) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \, Q(\{k\}) - \mu^2$$

を証明せよ. $\sum_{k=0}^{n} Q(\{k\}) = 1$ と $\sum_{k=0}^{n} k \, Q(\{k\}) = \mu$ は用いてよい.

【教科書（服部哲弥, 統計と確率の基礎, 学術図書）第 1 章練習問題 問 1.】左辺の 2 乗を展開して

$$v = \sum_{k\in\Omega} k^2 \, Q(\{k\}) - 2\mu \sum_{k\in\Omega} k \, Q(\{k\}) + \mu^2 \sum_{k\in\Omega} Q(\{k\}).$$

右辺に与えられた公式を代入すると求める式を得る.

問 2 (30).　1990 年代に戻ったつもりになって, 客の理解を得られない, と一列並びを渋る Y 駅の広報担当に代わり, 一列並びについての客の理解を得るための広告説明文を提案せよ. なお, 客の大多数は確率論の専門家ではないし, この講義を聞いてもいない.

【教科書第 2 章練習問題 問 1.】採点基準：並列並びと一列並びでは平均は等しいが分散に差があり, 分散の差は意味がある点を説得する必要がある.【並んでいられる時間（電車発車時刻や次の用事までの余裕）が決まっているときにせっかく並んだのに運悪く買い損なう恐れが小さい】というポイントが明快かどうかを採点する.

問 3 (30).　X_1, X_2 は独立な確率変数で, それぞれ区間 $[0, 1]$ 上の一様分布に従うとする. このとき, 確率 $\mathrm{P}[\, X_1 + X_2^2 < 1 \,]$ を計算せよ.

【教科書第 3 章練習問題 問 3 改題.】独立確率変数の結合分布の密度は各々の分布密度の積だから, $[0, 1]^2$ 上で 1, それ以外で 0. よって求める確率は

$$\int_{0 \leqq x_1, x_2 \leqq 1,\ x_1 + x_2^2 \leqq 1} 1 dx_1 dx_2 = \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2^2} dx_1 = \int_0^1 (1 - x_2^2) dx_2 = 2/3.$$