数理統計学　期末試験

2006/07/18 服部哲弥

問 1，問 2，問 3，問 4 をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

なお，標準正規分布 $N(0,1)$ に関する確率の数値として

x	$\mathrm{P}[\,[x,\infty)\,]$
1.6448	0.0500
1.9600	0.0250
2.326	0.0100
2.5758	0.0050

を用いてよい．

問 1 ．　X が $\mathrm{P}[\,X=k\,]=\dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$, $k=0,1,2,\cdots$,（ポワッソン分布）に従うとき，期待値 $\mathrm{E}[\,X\,]$ と分散 $\mathrm{V}[\,X\,]$ を求めよ．a は正の定数とする．

問 2 ．　ある集団中の無作為抽出標本 1 万個体中 100 個体にある病原菌の感染があった．この集団への病原菌の感染率 p を信頼水準 95% で区間推定せよ.（標本の感染率は本当は 2 項分布に従うが，これを正規分布で近似して計算せよ.）

問 3 ．　母平均と母分散の両方とも未知の正規母集団から大きさ 51 の標本を無作為抽出し不偏分散 $V(\omega)$ を計算した．帰無仮説 H_0: 母分散が v，を有意水準 5% で検定するときの棄却域を v で表せ．なお，自由度 50 のカイ平方分布 χ^2_{50} について $\chi^2_{50}((32.36,\infty))=0.975$（32.36 を超える値が起きる確率が 0.975 という意味）および $\chi^2_{50}((71.42,\infty))=0.025$ であることを用いてよい．

問 4 ．　次の (A) と (B) **両方**に，それぞれ簡単に答えよ．

(A) 講義の内容に加えてほしかったこと（物足りなかった場合），講義の内容から削ってほしかったこと（多すぎると感じた場合），補充してほしいかったこと（途中から難しくなったと感じた場合），を書け（複数の選択肢にまたがってもよい）．

(B) 次のいずれか**当てはまるほう**に解答せよ．

- 講義の半分以上の回に出席した場合：　興味を持った（あるいは，印象に残った）ことを書け.
- 講義の半分未満の回にしか出席しなかった場合：　出席の少ない理由を書け.

数理統計学　期末試験　**略解**　　2006/07/19 服部哲弥

問 1 (30).　X が $\mathrm{P}[\,X=k\,]=\dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$, $k=0,1,2,\cdots$, （ポワッソン分布）に従うとき，期待値 $\mathrm{E}[\,X\,]$ と分散 $\mathrm{V}[\,X\,]$ を求めよ．a は正の定数とする．

【教科書（服部哲弥，統計と確率の基礎，学術図書）第 6 章練習問題 問 3 改題.】

$$\mathrm{E}[\,X\,]=\sum_{k\geqq 0}k\frac{a^k}{k!}e^{-a}=a\sum_{k\geqq 1}\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}e^{-a}=a,$$

$$\mathrm{V}[\,X\,]=\mathrm{E}[\,X^2\,]-\mathrm{E}[\,X\,]^2=\mathrm{E}[\,X(X-1)\,]-a^2+a=a^2\sum_{k\geqq 2}\frac{a^{k-2}}{(k-2)!}e^{-a}-a^2+a=a.$$

問 2 (40).　ある集団中の無作為抽出標本 1 万個体中 100 個体にある病原菌の感染があった．この集団への病原菌の感染率 p を信頼水準 95% で区間推定せよ.（標本の感染率は本当は 2 項分布に従うが，これを正規分布で近似して計算せよ.）

【教科書第 6 章練習問題 問 2.】

大きさ n のデータにおける感染数を X とおくと中心極限定理から $\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ がほぼ標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．数表から $\mathrm{P}[\,[-1.960,1.960]\,]=0.95$ なので，信頼区間は $|X(\omega)-10^4p|\leqq 1.96\times 100\times\sqrt{p(1-p)}$．右辺において $p=X(\omega)/n=0.01$ と近似して $|p-0.01|\leqq 0.0196\times 0.1\times\sqrt{0.99}=0.00195$，すなわち，95% の信頼水準で信頼区間は $0.00805\leqq p\leqq 0.01195$.

問 3 (30).　母平均と母分散の両方とも未知の正規母集団から大きさ 51 の標本を無作為抽出し不偏分散 $V(\omega)$ を計算した．帰無仮説 H_0: 母分散が v，を有意水準 5% で検定するときの棄却域を v で表せ.

【教科書第 7 章練習問題 問 1.】

H_0 の下で $\dfrac{50}{v}V$ は χ^2_{50} に従う．対立仮説は，母分散が v でない（v より大きい可能性も小さい可能性も許す）ことだから，両側検定が妥当である．V の棄却域を $(0,a)\cup(b,\infty)$ とおくと，$\chi^2_{50}((\frac{50}{v}a,\infty))=1-\chi^2_{50}((0,\frac{50}{v}a))=1-0.025=0.975$ および $\chi^2_{50}((\frac{50}{v}b,\infty))=0.025$，すなわち，カイ平方分布の数表から $\dfrac{50}{v}a=32.36$ および $\dfrac{50}{v}b=71.42$，となるので，これを解いて，棄却域は $(0,0.6472v)\cup(1.4284v,\infty)$ となる．

問 4 (*).　都合により，省略します.