

## 数理統計学 中間試験

問1, 問2, 問3 をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ.

2007/05/29 服部哲弥

問1 . コーシー分布 , すなわち密度関数が  $\rho(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$  で与えられる実数上の連続分布 , は , 確率分布ではあるけれども , 期待値が無いことを示せ .

問2 . 母平均が  $m$  で母分散  $v$  の母集団から無作為抽出で取り出した大きさ  $n$  のデータ (独立同分布確率変数列)  $X_1, \dots, X_n$  の標本平均  $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$  の期待値  $E[\bar{X}_n]$  と分散  $V[\bar{X}_n]$  を求めよ ( $m, v, n$  だけを用いて表せ) .

問3 . 公的な専門機関が各地の統計学的な地震の起こりやすさを地図などの形で表示して日頃の注意を促すことによって大地震の被害を軽減しようとしている . 一方で , 事前に起こりやすいとはされていなかった地域で , 震度6を超える死者の出る地震が起きることも , 神戸大地震から石川県輪島の例まで体験している . 地震の起こりやすさについての知見やデータが不十分な状況で統計学的手法を用いると , 起こりにくいとされて安心している地域に地震が起きて , かえって被害を大きくするので地震の起こりやすさを表示すべきでない , という批判が予想されるが , この批判に対して , 賛成または反対を最初に明記した上 , その立場から解答用紙半分以内の分量で簡単に意見を述べよ . 実際にはたとえば中立的であっても , 自分の本当の気持ちとは別に (模擬裁判の演者のように) 単純な賛成または反対の立場を選んでその立場からのみ議論せよ .

問 1 (35) . コーシー分布 は, 確率分布ではあるけれども, 期待値が無いことを示せ .

【教科書 (服部哲弥, 統計と確率の基礎, 学術図書) 第 2 章練習問題 問 2】

$\rho$  は定義から非負だから, 積分が 1 になることを確かめれば良いが,  $\arctan x$  の微分の公式  $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$  を積分して  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x = \pm\pi/2$  を用いれば容易に

わかる . ( $\arctan x$  は  $\tan x$  の逆関数 .) よって確率分布である . しかし  $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\rho(x)dx > \int_1^{\infty} \frac{1}{2\pi x} dx = \infty$  なので期待値はない .

問 2 (35) . 母平均が  $m$  で母分散  $v$  の母集団から無作為抽出で取り出した大きさ  $n$  のデータ (独立同分布確率変数列)  $X_1, \dots, X_n$  の標本平均  $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$  の期待値  $E[\bar{X}_n]$  と分散  $V[\bar{X}_n]$  を求めよ ( $m, v, n$  だけを用いて表せ) .

【教科書第 3 章系 4】

期待値の線形性から

$$E[\bar{X}_n] = E\left[\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right] = \frac{1}{n}(E[X_1] + \dots + E[X_n]) = \frac{1}{n} \times m \times n = m .$$

分散については 2 乗の期待値であることと独立な場合の加法性から

$$V[\bar{X}_n] = \frac{1}{n^2}V[X_1 + \dots + X_n] = \frac{1}{n^2}(V[X_1] + \dots + V[X_n]) = \frac{1}{n^2} \times v \times n = \frac{v}{n} .$$

問 3 (35) . 地震の起こりやすさについての知見やデータが不十分な状況で統計学的手法を用いると, 起こりにくいとされて安心している地域に地震が起きて, かえって被害を大きくするので地震の起こりやすさを表示すべきでない, という批判が予想されるが, この批判に対して, 賛成または反対を最初に明記した上, その立場から解答用紙半分以内の分量で簡単に意見を述べよ .

【教科書第 4 章】

都合により解答例を省略する .