数理統計学　期末試験

問 1，問 2，問 3，問 4 をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

2007/07/17 服部哲弥

問 1．　視聴率 $x\%$（百分率で表示したもの）を x が $0 < x < 100$ のどの値であっても信頼水準 95% で小数第 1 位まで正確に得る，つまり，x の信頼区間の幅が 0.1 以内になるようにする，ために必要な調査対象世帯数を求めよ．視聴率は本当は 2 項分布だが，これを正規分布で近似して計算せよ．

ここで，確率変数 W_n の期待値と分散を $\mathrm{E}[\,W_n\,]$ と $\mathrm{V}[\,W_n\,]$ とするとき，W_n の分布を正規分布で近似するとは，$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{V}[\,W_n\,]}}(W_n - \mathrm{E}[\,W_n\,])$ の分布が標準正規分布 $N(0,1)$ であるとすることを言う．$N(0,1)$ の数値については問 3 の表の値を用いて良い．

問 2．　表の出る確率 p の硬貨を $n = 12$ 回投げて，表の出た回数に基づいて帰無仮説 H_0: $p = 0.5$ を両側検定する．表が何回出たとき H_0 を危険率 0.05（信頼水準 95% ）で棄却できるか？表の出る回数の分布は本当は 2 項分布だが，これを正規分布で近似して計算せよ． $N(0,1)$ の数値については問 3 の表の値を用いて良い．

問 3．　以下の表は，標準正規分布に従う独立確率変数列の標本平均と不偏分散およびそれらの比の分布の数表の一部分である．標準正規分布 $N(0,1)$ と t 分布 T_n については $P((-\infty,-a)\cup(a,\infty)) = 0.05$ となる a，χ^2 分布 χ^2_n と F 分布 F^m_n については $P((a,\infty)) = 0.05$ となる a，をそれぞれ与える部分を教科書の表から抜き出した．但し χ^2 分布については都合上教科書と行と列を入れ替えた．

空欄の (1) から (5) に入るべき数字を解答用紙に (1) 0.00 ⋯ (5) 9.99 などのように書け． なお同じ番号の空欄には同じ数字が入る．

T_n

$n \setminus \alpha$	0.05
4	2.776
5	2.571
6	2.447
7	2.365
10	2.228
∞	(4)

F^m_n

$n \setminus m$	1	2	3	4
4	(1)	6.94	6.59	6.39
5	(2)	5.79	5.41	5.19
6	5.99	5.14	4.76	4.53
7	5.59	4.74	4.35	4.12
10	4.96	4.10	3.71	3.48
∞	(5)	(3)	2.60	2.37

$N(0,1)$

$P((a,\infty))$	a
0.025	1.96

χ^2_n

$\alpha \setminus n$	1	2	3	4
0.05	(5)	5.99	7.81	9.49

問 4．　次の (A) と (B) **両方**に，それぞれ簡単に答えよ．(なお，以下の選択や回答数値は採点基準には無関係です.)

(A) 次のいずれか当てはまるほうに答えてください．

- この講義（試験は除く）に 10 回以上出席した場合：　講義の話で印象に残った（あるいは，興味を持った）ことを具体的に書いてください．
- この講義（試験は除く）に 9 回以下しか出席しなかった場合：　出席した回数（0 以上 9 以下の整数）を書いてください．

(B) この講義の理解度のいま試験を受けている全員についての平均値を想像して，100 点満点で書いてください．

数理統計学　期末試験　**略解**　2007/07/18 服部哲弥

問 1 (25).　視聴率 x% （百分率で表示したもの）を x が $0<x<100$ のどの値であっても信頼水準 95% で小数第 1 位まで正確に得る，つまり，x の信頼区間の幅が 0.1 以内になるようにする，ために必要な調査対象世帯数を求めよ．視聴率は本当は 2 項分布だが，これを正規分布で近似して計算せよ．

【教科書（服部哲弥，統計と確率の基礎）第 6 章練習問題 問 1.】

独立同分布確率変数（データ）列 $X_1,\cdots,X_n$ に対して標本平均を $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$ とおく．視聴率を小数で表したものを $p=x/100$ とおくと，条件は $\mathrm{P}[\,|\bar{X}-p|<0.0005\,]\geqq 0.95$ となる．

$\mathrm{E}[\,X_1\,]=p$, $\mathrm{V}[\,X_1\,]=p(1-p)$，そしてデータの和は $n\bar{X}$ になることに注意すると，中心極限定理から，$\dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}(n\bar{X}-np)$ が $N(0,1)$ にほぼ従う．よって $a=0.0005\sqrt{\dfrac{n}{p(1-p)}}$ とおき，標準正規分布に関する確率を P とおくと

$$\mathrm{P}[\,|\bar{X}-p|<0.0005\,]=\mathrm{P}\left[\,\left|\tfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}(n\bar{X}-np)\right|<a\,\right]=P((-a,a))=1-2P((a,\infty)).$$

これが 0.95 以上だから $P((a,\infty))<0.025$ となる a を求めればよい．問 3 の数表から $a>1.96$ となるので $n>(1.96/0.0005)^2p(1-p)$．右辺は $p=0.5$ で最大値 3841600 をとるので n は 3850000 以上，つまり約 400 万世帯以上にすればよい．（が，東京都の人口が約 1000 万人であることを思えば，非現実的に大きすぎる値である．通常発表される視聴率の小数点以下は信用できそうにない．）

問 2 (25).　表の出る確率 p の硬貨を $n=12$ 回投げて，表の出た回数に基づいて帰無仮説 H_0: $p=0.5$ を両側検定する．表が何回出たとき H_0 を危険率 0.05（信頼水準 95% ）で棄却できるか？表の出る回数の分布は本当は 2 項分布だが，これを正規分布で近似して計算せよ．

【教科書（服部哲弥，統計と確率の基礎）第 5 章練習問題 問 1 一部，改題.】

表の回数を与える確率変数を W_n とおくと，$\mathrm{E}[\,W_n\,]=np$, $\mathrm{V}[\,W_n\,]=np(1-p)$ なので，帰無仮説 H_0 の下で $|W_n-np|/\sqrt{np(1-p)}=|W_n-6|/1.732$ が標準正規分布 $N(0,1)$ に近い．両側 0.025 ずつの危険域をとると，信頼区間は，標準正規分布の数表から $[-1.96,1.96]$．よって $6-1.732\times1.96\leqq W_n\leqq 6+1.732\times1.96$，すなわち，$2.61\leqq W\leqq 9.39$．2 回以下または 10 回以上表が出たとき棄却できる．

問 3 (25).

空欄の (1) から (5) に入るべき数字を解答用紙に (1) 0.00 $\cdots$ (5) 9.99 などのように書け．

T_n

$n\setminus\alpha$	0.05
4	2.776
5	2.571
6	2.447
7	2.365
10	2.228
∞	(4)

F_n^m

$n\setminus m$	1	2	3	4
4	(1)	6.94	6.59	6.39
5	(2)	5.79	5.41	5.19
6	5.99	5.14	4.76	4.53
7	5.59	4.74	4.35	4.12
10	4.96	4.10	3.71	3.48
∞	(5)	(3)	2.60	2.37

$N(0,1)$

$P((a,\infty))$	a
0.025	1.96

χ_n^2

$\alpha\setminus n$	1	2	3	4
0.05	(5)	5.99	7.81	9.49

【教科書（服部哲弥，統計と確率の基礎）第 5，7，8 章の表と第 8 章 §1 後半の説明.】

(1) 7.71　(2) 6.61　(3) 3.00　(4) 1.96 (5) 3.84

問 4 (25).　都合により，省略します．