数理統計学　中間試験

問１，問２，問３ をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

2008/05/27 服部哲弥

問１．　確率変数 X の分散 $\mathrm{V}[\,X\,] = \mathrm{E}[\,(X - \mathrm{E}[\,X\,])^2\,]$ と定数 a に対して

$$\mathrm{V}[\,a\,X\,] = a^2\mathrm{V}[\,X\,]$$

が成り立つことを証明せよ.（期待値の線形性 $\mathrm{E}[\,aX + bY\,] = a\mathrm{E}[\,X\,] + b\mathrm{E}[\,Y\,]$ を用いてもよい.）

問２．　離散値確率変数 X と Y が独立なとき， すなわち，

$$\mathrm{P}[\,X = a,\ Y = b\,] = \mathrm{P}[\,X = a\,] \times \mathrm{P}[\,Y = b\,]$$

が全ての取り得る値の組 (a, b) に対して成り立つとき，

$$\mathrm{E}[\,X^2\,Y^3\,] = \mathrm{E}[\,X^2\,]\,\mathrm{E}[\,Y^3\,]$$

が成り立つことを示せ.

問３．　$0 < p < 1$ を定数とする．表の出る確率が p の硬貨を１回投げて表または裏にお金を賭ける賭博を行う． 簡単のため，賭ける金額は一人当たり等しく１銭（架空のお金の単位）とし，手数料等は無く，賭けた金は全て集めて，勝った参加者に平等に分けるものとする．以下の小問に答えよ.

(i) $0 < q < 1$ とする．参加者の N 人中 $N\,q$ 人が表に賭け，残り $N\,(1 - q)$ 人が裏に賭けたとき，表に賭けた人は平均（期待値で）いくら儲かるか？計算も示して答えよ.（まず１銭差し出すことを忘れないように.）

(ii) 参加者全員が合理的に考え，硬貨の表が出る確率が p であることを知っていて，皆の賭ける様子を見ながら賭を変えることができて，皆が納得してから硬貨が投げられるとすると，表に賭ける人の割合 q はいくらになるはずか？理由も示して答えよ.

(iii) $p > 0.5$ とする．参加者全員が公平な硬貨（表が出る確率が 0.5）と信じていて，前小問と同様の合理的行動をするとき，表に賭けた人の期待値を求め，正になることを確認せよ.

（解答に無関係な注：　現代日本では公営の宝くじ等を除いて賭博（偶然の現象にお金を賭ける行為）は違法である．また，実際には賭博は，現存する公営ギャンブルを含めて，場所代などの巧妙な名目で無条件にお金を巻き上げることが主要な目的なので，手数料無しの仮定は賭博の本質に著しく反する．これらの点で，本問は架空の話である．なお，最後の小問において，一人だけ硬貨の状況を承知して表に賭けた場合が，いかさま賭博や証券業界のインサイダー取引が儲かる原理である.）

数理統計学　中間試験　**略解**　　2007/05/28 服部哲弥

問 1 (35). 確率変数 X の分散 $\mathrm{V}[\,X\,] = \mathrm{E}[\,(X - \mathrm{E}[\,X\,])^2\,]$ と定数 a に対して $\mathrm{V}[\,a\,X\,] = a^2\mathrm{V}[\,X\,]$ が成り立つことを証明せよ．

【教科書第 2 章 §2 本文および 4/22 講義.】

$\mathrm{V}[\,a\,X\,] = \mathrm{E}[\,(a\,X - \mathrm{E}[\,a\,X\,]^2\,] = \mathrm{E}[\,(a\,X - a\,\mathrm{E}[\,X\,])^2\,] = \mathrm{E}[\,a^2(X - \mathrm{E}[\,X\,])^2\,] = a^2\mathrm{E}[\,(X - \mathrm{E}[\,X\,])^2\,] = a^2\mathrm{V}[\,X\,]$

問 2 (35). 離散値確率変数 X と Y が独立なとき， $\mathrm{E}[\,X^2\,Y^3\,] = \mathrm{E}[\,X^2\,]\,\mathrm{E}[\,Y^3\,]$ が成り立つことを示せ．

【教科書第 3 章練習問題 問 1 特別な場合.】

X, Y の取り得る値全てにわたる和をそれぞれ $\displaystyle\sum_a, \sum_b$ と書くと，

$\displaystyle \mathrm{E}[\,X^2\,Y^3\,] = \sum_a\sum_b a^2b^3\mathrm{P}[\,X = a,\ Y = b\,] = \sum_a a^2\mathrm{P}[\,X = a\,]\sum_b b^3\mathrm{P}[\,Y = b\,] = \mathrm{E}[\,X^2\,]\,\mathrm{E}[\,Y^3\,]$.

問 3 (30). $0 < p < 1$ を定数とする．表の出る確率が p の硬貨を 1 回投げて表または裏にお金を賭ける賭博を行う．

【教科書第 1 章（硬貨投げ応用問題）.】

(i) $0 < q < 1$ とする．参加者の N 人中 $N\,q$ 人が表に賭け，残り $N\,(1-q)$ 人が裏に賭けたとき，表に賭けた人は平均（期待値で）いくら儲かるか？計算も示して答えよ．

確率 p で表が出て N 銭を表に賭けた $N\,q$ 人で分配し，裏が出たときは分配が無い．1 銭賭けるので，儲け X は，$\mathrm{P}[\,X = -1 + 1/q\,] = p$, $\mathrm{P}[\,X = -1\,] = 1 - p$ を満たす確率変数．よって期待値 $\mathrm{E}[\,X\,] = p(\dfrac{1}{q} - 1) + (1-p)(-1) = \dfrac{p-q}{q}$.

(ii) 表に賭ける人の割合 q はいくらになるはずか？

裏に賭けた人の儲け Y は，$\mathrm{P}[\,X = -1 + 1/(1-q)\,] = 1 - p$, $\mathrm{P}[\,X = -1\,] = p$ を満たすので $\mathrm{E}[\,Y\,] = \dfrac{q-p}{1-q}$．表に賭ける人が少ない $(q < p)$ と表に賭けたほうが儲けの期待値が正になるので表に賭を変え，表に賭ける人が多い $(q > p)$ と同様に裏に変えるから，$q = p$ のときに皆が納得する．よって $q = p$.

(iii) $p > 0.5$ とする．参加者全員が公平な硬貨（表が出る確率が 0.5）と信じていて，前小問と同様の合理的行動をするとき，表に賭けた人の期待値を求め，正になることを確認せよ．

前小問と同様に考えると $q = 0.5$ となるので，最初の小問から $\mathrm{E}[\,X\,] = 2p-1$．$p > 0.5$ なので正である．