数理統計学　期末試験

問 1，問 2，問 3，問 4 をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

2008/07/15 服部哲弥

問 1．　統計的検定の基礎的な手続きに関する次の文章の空欄 (1)–(5) に当てはまる用語をそれぞれ**下記語群から選び**，解答用紙に　(0) 数理統計学　のように解答せよ．

以下の手続きを統計的検定とよぶ．

仮説 H:「母集団の分布は P である」を立てる（この，最初に立てる仮説を $\boxed{(1)\quad\quad}$ とよぶ）．小さな正数である，と自分が判断する実数 α（$\boxed{(2)\quad\quad}$ などとよぶ）を固定し，$\alpha = P(A)$ をみたす事象 A（$\boxed{(3)\quad\quad}$ などとよぶ）を定める．

実際の実験・調査・観測などによって標本 x を得たとする．$x \in A$ ならば,『仮説 H が正しいのに A が生じるとはとうてい思えない,』と判断して，仮説 H を $\boxed{(4)\quad\quad}$ し,「母集団の分布は P でない」と結論する．$x \notin A$ ならば仮説 H を $\boxed{(5)\quad\quad}$ し,「母集団の分布は P でないとはいえない（さらなる研究が必要だ）」と結論する．

語群

意思決定，採決，採択，採用，賛成，反対，棄却，棄権，
検定，点推定，区間推定，危険域，信頼区間，信頼水準，有意水準，
標本空間，母分布，母集団，統計的仮説検定，統計的推測，帰無仮説，背理法

問 2．　10 個パックの卵の重さを量ったところ，グラム単位で 61, 62, 64, 64, 68, 58, 63, 64, 66, 67, であった．鶏が産む卵の重さは正規分布 $N(\mu, v)$ にしたがってばらつくと仮定して，母分散 v を信頼水準 **95** % で両側区間推定せよ．ただし，上記 10 個の数字は，平均が $\bar{X}_{10}(w) = 63.7$ で，$\bar{X}_{10}(w)$ との差の 2 乗の和が $9V_{10}(w) = \displaystyle\sum_{i=1}^{10}(X_i(w) - \bar{X}_{10}(w))^2 = 78.1$ であることを用いて良い．また自由度 n の χ^2 分布に従う確率変数 χ_n^2 について $\alpha = \mathrm{P}[\chi_n^2 > c]$ となる c の数値は下表を用いてよい.（表の中の空欄 (ア)(イ) はあとの問で用いる.）

$n \setminus \alpha$	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01
9	2.09	2.70	3.33	16.92	19.02	21.67
10	2.56	3.25	3.94	18.31	20.48	23.21
5000	4770	(ア)	4837	(イ)	5198	5236

問 3．　X_i, $i = 1, \cdots, n$, が独立で標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数のとき，$\chi_n^2 = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ は自由度 n の χ^2 分布に従う．$\mathrm{E}[\,X_i^2\,] = 1$, $\mathrm{V}[\,X_i^4\,] = 2$ を用いると，n が大きいとき，中心極限定理から $\dfrac{1}{\sqrt{2n}}(\chi_n^2 - n)$ の分布は $N(0,1)$ に近い．このことを用いて，問 2 の χ^2 分布の表の $n = 5000$ の行の空欄 (ア)(イ) の近似値をそれぞれ求めよ．答えだけでなく，計算の経過も示すこと．$N(0,1)$ に従う確率変数 Z について，$\alpha = \mathrm{P}[Z > c]$ となる c の数値は次の表を用いてよい．

α	0.05	0.025	0.01
c	1.6448	1.9600	2.326

問 4．　次のいずれか**当てはまるほう一方だけ**に答えてください.（なお，どちらに当てはまるか，および，数値・回答内容は採点基準には無関係です.）

- この講義の過去の中間・期末試験以外の回（4 月 15,22, 5 月 13,20, 6 月 03,10,17,24, 7 月 01,08 の 10 回）を欠席したことがある場合：10 回のうち**出席した回数**（0 以上 9 以下の整数）を書いてください．また，欠席した主な理由を一つだけ書いてください．
- この講義の試験以外の過去 10 回全てに出席した場合：講義の話（または，本の内容）で印象に残った（あるいは，興味を持った）ことを具体的に書いてください．

数理統計学　期末試験　**略解**　　2008/07/16 服部哲弥

注：　以下，近似値・近似変形も等号で結ぶ.

問 1 (25).　空欄を埋めよ.

【教科書第５章§3. 本文（検定の原理）.】

以下の手続きを統計的検定とよぶ.

仮説 H:「母集団の分布は P である」を立てる（この，最初に立てる仮説を $\boxed{\text{(1) 帰無仮説}}$ とよぶ）. 小さな正数である，と自分が判断する実数 α （$\boxed{\text{(2) 有意水準}}$ などとよぶ）を固定し，$\alpha = P(A)$ をみたす事象 A（$\boxed{\text{(3) 危険域}}$ などとよぶ）を定める.

実際の実験・調査・観測などによって標本 x を得たとする. $x \in A$ ならば,『仮説 H が正しいのに A が生じるとはとうてい思えない,』と判断して，仮説 H を $\boxed{\text{(4) 棄却}}$ し,「母集団の分布は P でない」と結論する. $x \notin A$ ならば仮説 H を $\boxed{\text{(5) 採択}}$ し,「母集団の分布は P でないとはいえない（さらなる研究が必要だ）」と結論する.

問 2 (25).　10 個パックの卵の重さを量ったところ，グラム単位で 61, 62, 64, 64, 68, 58, 63, 64, 66, 67, であった. 鶏が産む卵の重さは正規分布 $N(\mu, v)$ にしたがってばらつくと仮定して，母分散 v を信頼水準 **95**％ で両側区間推定せよ.

【教科書第７章練習問題 問 2 改題.】

教科書にあるとおり，$\dfrac{9V_9}{v} = \dfrac{78.1}{v}$ は自由度 $n = 10 - 1 = 9$ の χ^2 分布からとった標本となる. 両側に 2.5％ ずつの危険域をとって信頼水準 95％ で区間推定する. $\alpha = 0.975$ と 0.025 に対応する自由度 9 の χ^2 分布の区間の端点の値は数表からそれぞれ 2.70, 19.02 だから，信頼区間は $2.70 < \dfrac{78.1}{v} < 19.02$ となる. これから $4.10 < v < 28.93$.

問 3 (25).　中心極限定理を用いて，次の χ^2 分布の表の $n = 5000$ の行の空欄 (ア)(イ) の近似値をそれぞれ求めよ. 答えだけでなく，計算の経過も示すこと.

$n \setminus \alpha$	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01
5000	4770	(ア)	4837	(イ)	5198	5236

【教科書第５章と７章の表の関係.】

(ア) $\dfrac{1}{\sqrt{2n}}(\chi_n^2 - n)$ の分布が $N(0,1)$ に近い，ということを χ_{5000}^2 の分布は $N(5000, 10000)$ に近いと見ると，特に 5000 に関して対称に近い. よって

$$\begin{aligned} 0.975 &= 1 - 0.025 = 1 - \mathrm{P}[\chi_{5000}^2 > 5198] = 1 - \mathrm{P}[\chi_{5000}^2 < 5000 * 2 - 5198] \\ &= 1 - \mathrm{P}[\chi_{5000}^2 < 4802] = \mathrm{P}[\chi_{5000}^2 \geqq 4802]. \end{aligned}$$

よって (ア)$= 4802$.

(イ) $0.05 = \mathrm{P}[Z > 1.6448] = \mathrm{P}[\dfrac{1}{\sqrt{2 * 5000}}(\chi_{5000}^2 - 5000) > 1.6448] = \mathrm{P}[\chi_{5000}^2 > 5164]$. よって (イ)$= 5164$.

(ア) の別解：$N(0,1)$ の 0 に関する対称性を用いると，

$$\begin{aligned} 0.975 &= 1 - 0.025 = 1 - \mathrm{P}[Z > 1.9600] = 1 - \mathrm{P}[Z < -1.9600] = \mathrm{P}[Z \geqq -1.9600] \\ &= \mathrm{P}[\dfrac{1}{\sqrt{2 * 5000}}(\chi_{5000}^2 - 5000) \geqq -1.96] = \mathrm{P}[\chi_{5000}^2 \geqq 4804]. \end{aligned}$$

よって (ア)$= 4804$.（1 桁目の違いは近似の誤差によるものでどちらも間違いではない. ちなみに，中心極限定理を用いない 1 桁目まで正しい値は (ア)$= 4806$,（イ)$= 5166$. 他に，2 つの表を比べて線形内挿する別解もあり，この数値を得る.）

問 4 (25).　都合により，解答例を省略します.