# 解析学序論 B　中間試験

**問 1，問 2，問 3 をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．**

2007/06/05 服部哲弥

**問 1 ．**

以下で定義される平面ベクトル場をそれぞれ図示せよ．

(i) $\vec{V}(x,y) = (x,y)$
(ii) $\vec{V}(x,y) = (y,-x)$
(iii) $\vec{V}(x,y) = (-y,x)$

**問 2 ．**　原点を中心とする半径 1 の円 $C$ のパラメータ表示（反時計回り一周）を見つけて，その表示に基づいて積分を実行することで $C$ の長さ $L(C)$ を求めよ．

**問 3 ．**

(i) $\vec{V}(x,y) = (y,x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, は勾配ベクトル場であることを示せ．また，ポテンシャルを具体的に書け．
(ii) $\vec{V}(x,y) = (-y,x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, は勾配ベクトル場でないことを示せ．

解析学序論 B　中間試験　**略解**　2007/06/06 服部哲弥

**問 1 (40).**

以下で定義される平面ベクトル場をそれぞれ図示せよ．$\vec{V}(x,y)=(x,y)$, $\vec{V}(x,y)=(y,-x)$, $\vec{V}(x,y)=(-y,x)$

(i) 各点で原点から放射状に外向きのベクトル．原点からの距離に比例して大きい.

(ii) 各点で原点を中心としたとき時計回り向きのベクトル．原点からの距離に比例して大きい.

(iii) 上と類似の図だが反時計回り.

**問 2 (30).** 原点を中心とする半径 1 の円 $C$ のパラメータ表示（反時計回り一周）を見つけて，その表示に基づいて積分を実行することで $C$ の長さ $L(C)$ を求めよ.

たとえば，$\vec{u}(t)=(\cos t,\sin t)$, $0\leqq t<2\pi$, など.

$$L(C)=\int_0^{2\pi}\|\frac{d\,\vec{u}}{dt}(t)\|\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt=2\pi.$$

**問 3 (30).**

(i) $\vec{V}(x,y)=(y,x)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, は勾配ベクトル場であることを示せ．また，ポテンシャルを具体的に書け.
(ii) $\vec{V}(x,y)=(-y,x)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, は勾配ベクトル場でないことを示せ.

(i) $f(x,y)=xy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, とおくと，$(\mathrm{grad}\,f)(x,y)=\vec{V}(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, となるので，$\vec{V}$ は勾配ベクトル場である．$f$ がポテンシャルの例（$xy+1$ など $xy+C$ の形のものは全て正解）.

(ii) $(\mathrm{grad}\,f)(x,y)=\vec{V}(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, が成り立つ関数 (スカラー場) $f$ があるとすると，$\dfrac{\partial V_1}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial V_2}{\partial x}(x,y)$ が成り立つはずだが，左辺は恒等的に $-1$, 右辺は恒等的に 1，なのでこれは成り立たない.