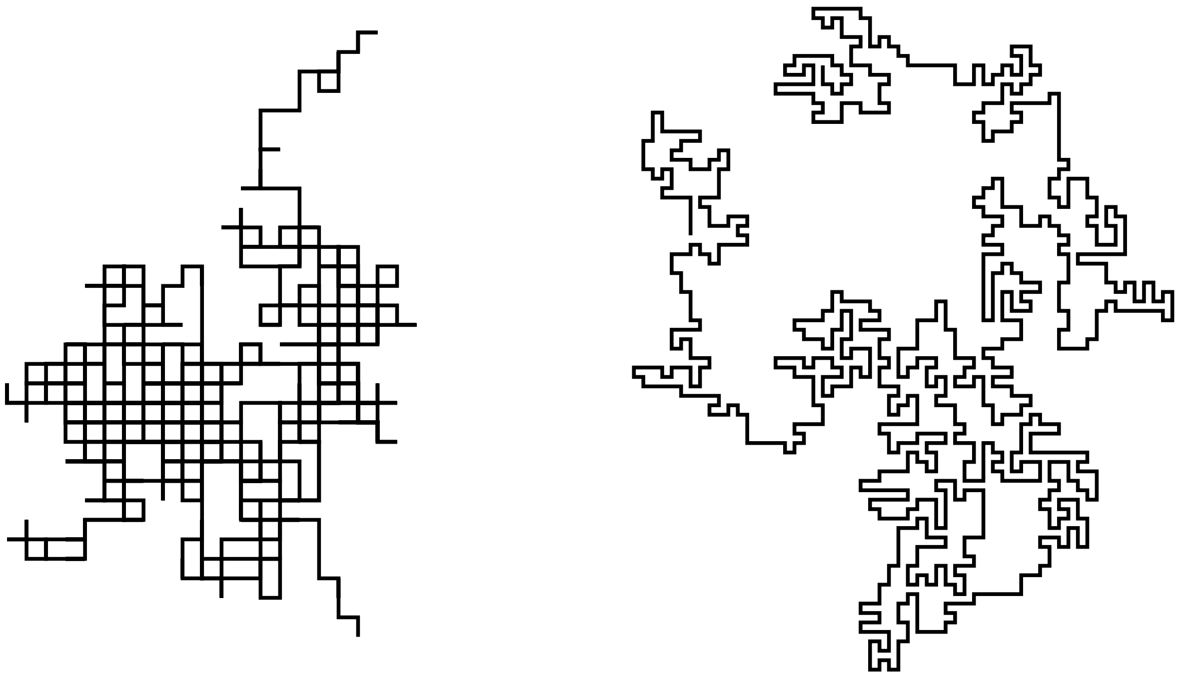
ランダムウォークとくりこみ群

東北大学・数学教室 2003.04.28
服 部 哲 弥 (名大 多元数理)

服部哲弥,「ランダムウォークとくりこみ群」, 共立出版（新しい解析学の流れ）, ~~2004.3 刊行予定.~~

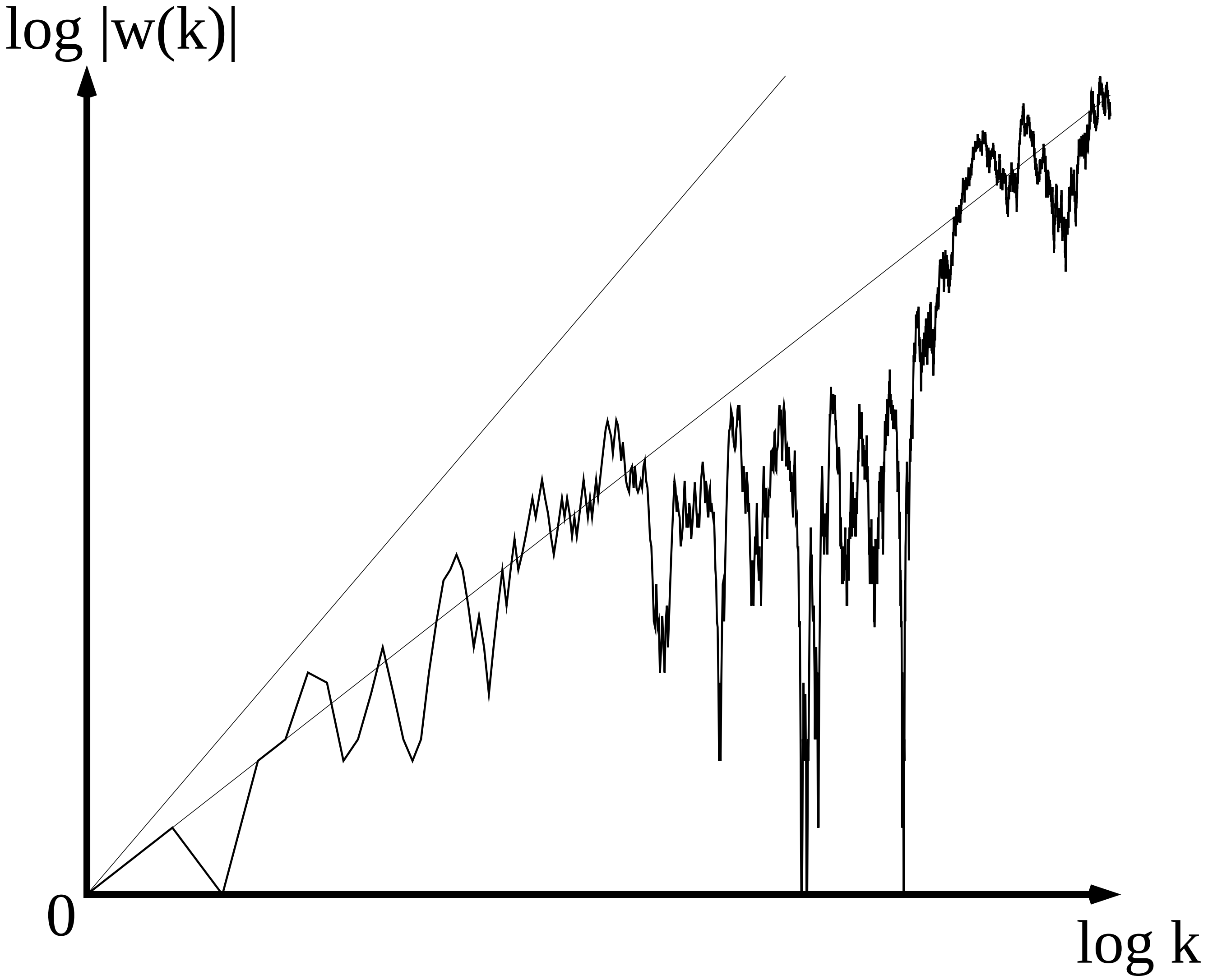
2004.8 刊行．詳しくは
http:/www.math.tohoku.ac.jp/~hattori/kyoritu.htm

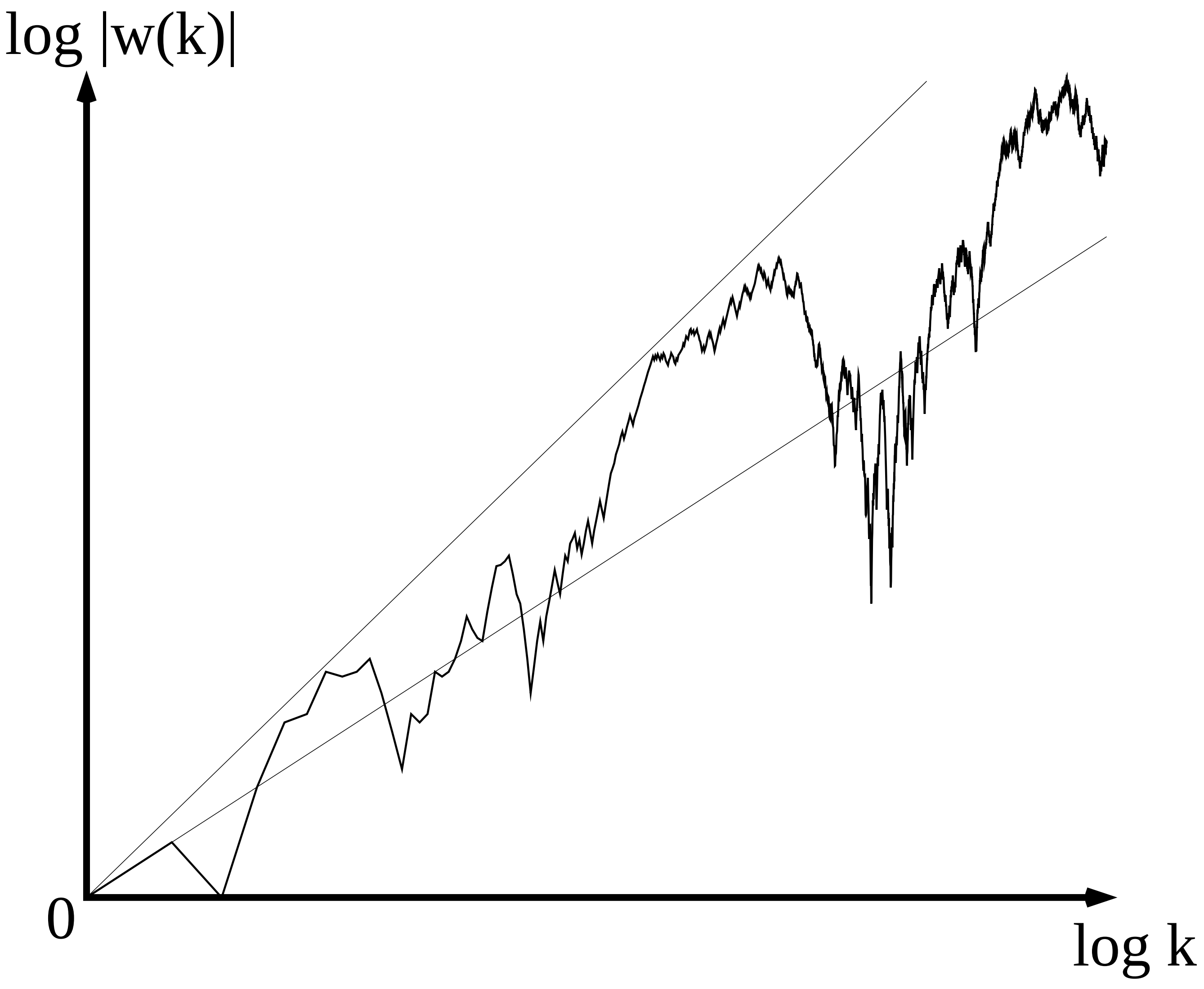
1. 序.
   - あらゆるスケールでギザギザ
   - くりこみ群の（不十分な）定義
2. １次元単純ランダムウォークのくりこみ群.
   - F. Knight
3. $\mathbb{Z}$ 上の確率連鎖のくりこみ群による構成と解析.
   - 独立性（マルコフ性, 指数 1/2, CLT）からの脱却
4. 応用 ― $\mathbb{Z}$ 上の self-repelling walk.



1000 steps

4000 steps


log |w(k)|
0
log k


log |w(k)|
0
log k

くりこみ群の (不十分な) 定義：無限自由度系の解析の一手段であって以下の性質を持つもの

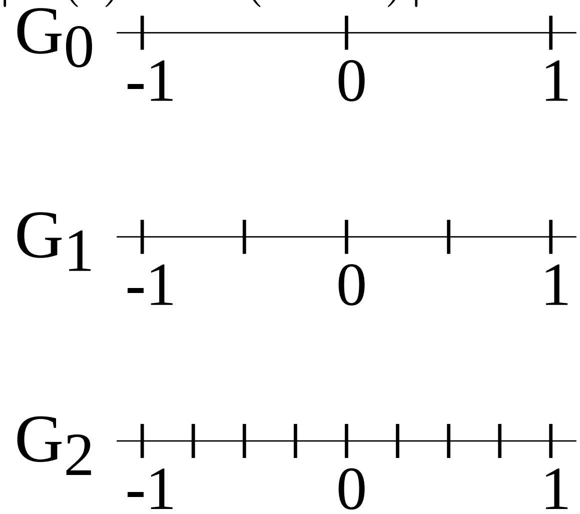
１．距離空間に値を取る関数 (path) の集合上の測度の, **観測精度のスケール変換**に対する変化を適切なパラメータ空間上の力学系として表現すること.
２．追跡すべき軌道が**大局的**に素直なこと.
３．軌道の固定点への収束または固定点近傍の線型化が path の漸近的性質を与えること.

講演：くりこみ群を $\mathbb{Z}$ 上の chain の漸近的性質（指数）をとおして紹介 「大局的」は略

２．１次元単純ランダムウォークのくりこみ群．

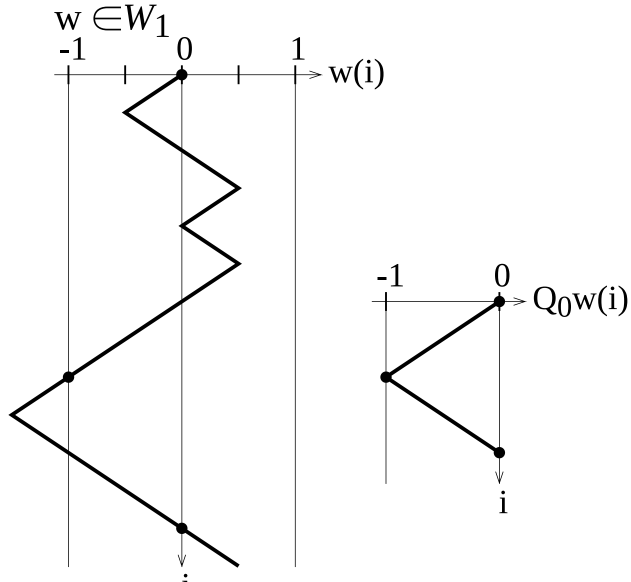
F. B. Knight (1962) １次元単純ランダムウォークの概収束極限によるブラウン運動の構成

$G_n = 2^{-n}\mathbb{Z}$. G_n 上の path の集合 $\mathcal{W}_n =$
$= \{ w : \mathbb{Z}_+ \to G_n \mid w(0)=0,\ |w(i)-w(i+1)| = 2^{-n} \}$



Decimation Q_n： $\mathcal{W}_{n+1} \to \mathcal{W}_n$：精度のスケール変換

$(Q_n w)(i) = w(T_{n,i}(w))$; $T_{n,0}(w) = 0$, $T_{n,i+1}(w) =$
$= \inf\{ j > T_{n,i}(w) \mid w(j) \in G_n \setminus \{ w(T_{n,i}(w)) \} \}$



P_n: $\mathcal{W}_n$ 上の「一様分布」($P_n[k$ 歩指定$] = 2^{-k}$) SRW

・ $P_{n+1} \circ Q_n^{-1} = P_n$ （左右対称性）

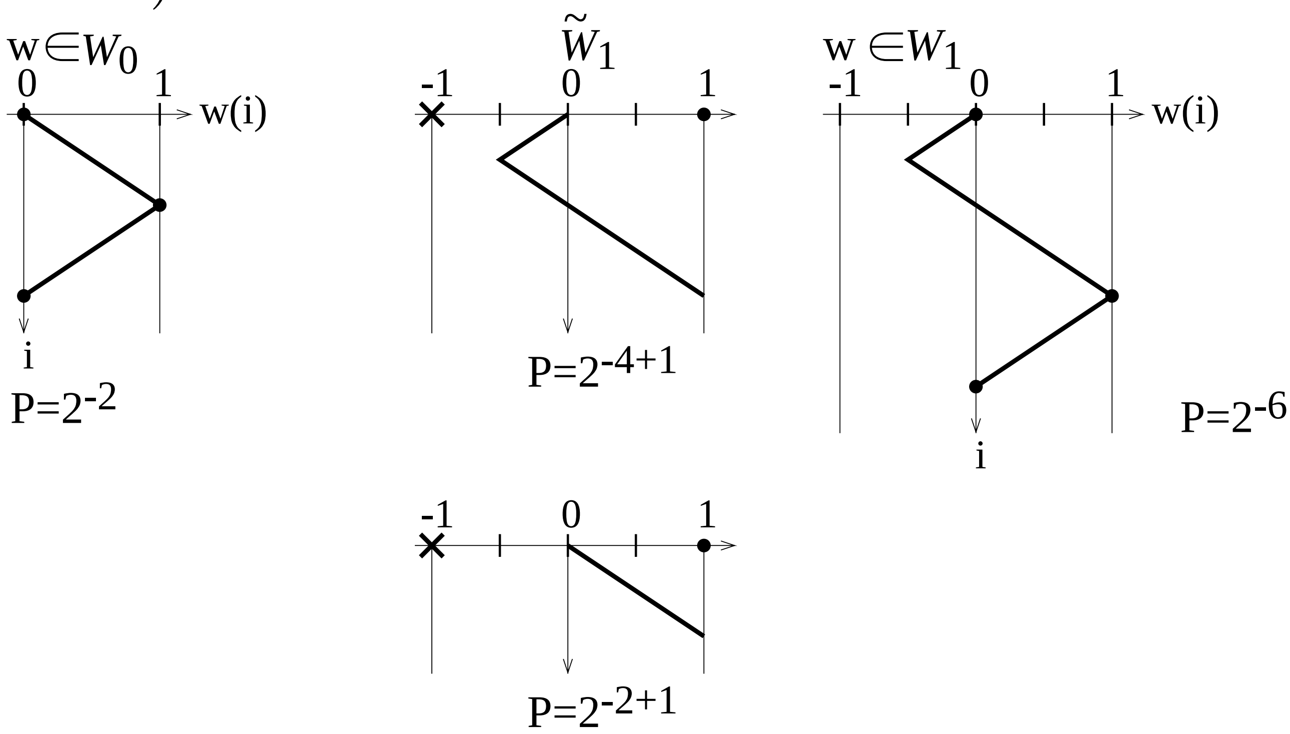
Q_n^{-1}: decimation の逆

－ path の各 1 歩に**細かい構造**を追加

F. Knight（連続極限 $n \to \infty$）：整合条件に基づく extension を構成し，$(\mathcal{W}_n, P_n)$ への projection を $Y_n(\cdot)$ とするとき，$Y_n(4^n \cdot)$ が概収束 Ito–McKean の教科書

・細かい構造, $\frac{1}{2}$, 4 → くりこみ群の視点で見直す

細かい構造：$\tilde{\mathcal{W}}_1$ ($G_1 = 2^{-1}\mathbb{Z}$ 上の path で，$0 \to 1$ で -1 を通らないもの) と相似



・くりこみ群：細かい構造 $\tilde{\mathcal{W}}_1$ の付加による歩数の母関数の変化（recursion）

$\tilde{\mathcal{W}}_n$（G_n 上の path で，$0 \to 1$ で -1 を通らないもの）における総歩数 $L = T_{0,1}$ の母関数

$$\Phi_n(z) = \sum_{w \in \tilde{\mathcal{W}}_n} z^{L(w)} \qquad (\text{係数 } 1 \ \Leftrightarrow \text{SRW})$$

・ $\Phi_n(z) = \Phi_1(\Phi_{n-1}(z))$

くりこみ群： Φ_1 が定める力学系

$$\Phi_1(z) = \frac{z^2}{1-2z^2}$$

・ Φ_1 の固定点 $x_c = 1/2 \to$ 全確率が 1

・ $\lambda = \Phi_1'(x_c) = 4 \to$ 平均歩数の増加率

○ 確率過程におけるくりこみ群は置き去りにされてきた?

・ マルコフ性 $\to$ Dirichlet form 等の強力な解析的方法

・ Finitely ramified でないと無限次元 (cf. $\mathbb{Z}^d$, $d \geqq 2$)

○ 適用範囲の拡大：新しい確率過程（非マルコフ），新しい現象

３．$\mathbb{Z}$ 上の確率連鎖のくりこみ群による構成と解析．

$\tilde{\mathcal{W}}_1$：G_0 上の path で，$0 \to 2$ で -2 を通らないもの（歩幅を固定して確率連鎖で説明）．総歩数 L の母関数

$$\Phi_1(z) = \sum_{w \in \tilde{\mathcal{W}}_1} b_1(w) z^{L(w)} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (b_1 = 1 \Leftrightarrow \mathrm{SRW})$$

・条件 (i) $c_2 > 0$, (ii) $(\forall k)\ c_k \geqq 0$, (iii) $\exists k \geqq 3;\ c_k > 0$, (iv) 収束半径 $r > 0$.　　（注：$c_0 = c_1 = 0$）

$n \geqq 2$

・くりこみ群を第一原理：$\Phi_n(z) = \Phi_1(\Phi_{n-1}(z))$

命題. (i) $\exists! x_c \in (0, r); \Phi_1(x_c) = x_c$. (ii) $\lambda = \Phi'(x_c) > 2$. (SRW: $x_c = 1/2$, $\lambda = 4$)

$\tilde{\mathcal{W}}_n$：G_0 上の path で，$0 \to 2^n$ で -2^n を通らないもの

$$\Phi_n(z) = \sum_{w \in \tilde{\mathcal{W}}_n} b_n(w) z^{L(w)}$$

・$\mathrm{P}_n[\,\{w\}\,] = b_n(w) {x_c}^{L(w)-1}$ は $\tilde{\mathcal{W}}_n$ 上の確率

定理． $\displaystyle\sum_{w \in \tilde{\mathcal{W}}_n} e^{-s\,\lambda^{-n} L(w)} \mathrm{P}_n[\,\{w\}\,] = \frac{1}{x_c} \Phi_n(e^{-\lambda^{-n} s} x_c)$ を母関数とするスケールされた歩数分布が $n \to \infty$ で弱収束する.（＋種々の詳しい性質.）

○ 歩数 $k \sim \lambda^n$ で位置 $x = 2^n \to x \sim k^\nu$; $\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$
(「ギザギザ」の度合いを示す指数！)

注意.
$(\tilde{\mathcal{W}}_n, \mathrm{P}_n)$: 端点固定，有限，不定長の path の上の測度
$\downarrow$
・ 拡張定理によって確率連鎖（無限長 path 上の測度で，k 歩目の位置 W_k が可測）が構成できる.
（くりこみ群が整合条件になる.）

定理（重複対数の法則）. $\{W_k\}$ について重複対数の法則が成り立つ．即ち，$C_\pm > 0$ が存在して

$$C_- \leqq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{|W_k|}{k^\nu (\log\log k)^{1-\nu}} \leqq C_+ \,.$$

ν はくりこみ写像 Φ_1 の固定点 x_c での微分係数 $\lambda = \Phi'(x_c)$ を用いて $\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$ で与えられる.

Φ_1（path の構造）＋ recursion（くりこみ群） $\to$ あらゆるスケールの構造「複雑なギザギザ」，漸近指数がくりこみ群だけで得られる cf. SRW の場合定理 B-C-2 (e.g. Feller)

4．$\mathbb{Z}$ 上の self-repelling walk．

Self-avoiding path：一度通った点は通らない path

・ ランダムウォーク（マルコフ性）の反対の極端

・ path のギザギザを測る指数 $|W_k| \sim k^{\nu}$

単純ランダムウォーク： $\nu = 1/2$

$\mathbb{Z}$ 上の self-avoiding path： $\nu = 1$（等速直線運動）

内挿する確率連鎖の族－これまでの提唱は ν 不連続

定理（Hattori–Hattori, 2003) $\exists$ 確率連鎖（無限長 path 上の確率測度の族）P_u, $u \in [0, 1]$;

1. $u = 1$: 1 次元単純ランダムウォーク
2. $u = 0$: $\mathbb{Z}$ 上の self-avoiding path
3. Displacement の指数 $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log k} \log \mathrm{E}_u[\, |W_k|^s \,]$ $= s\nu_u$, $s \geqq 0$, が u について連続

証明．SAP の歩数の母関数 $\Phi_{0,1}(z) = z^2$

SRW の歩数の母関数 $\Phi_{1,1}(z) = \Phi_1(z) = \dfrac{z^2}{1-2z^2}$

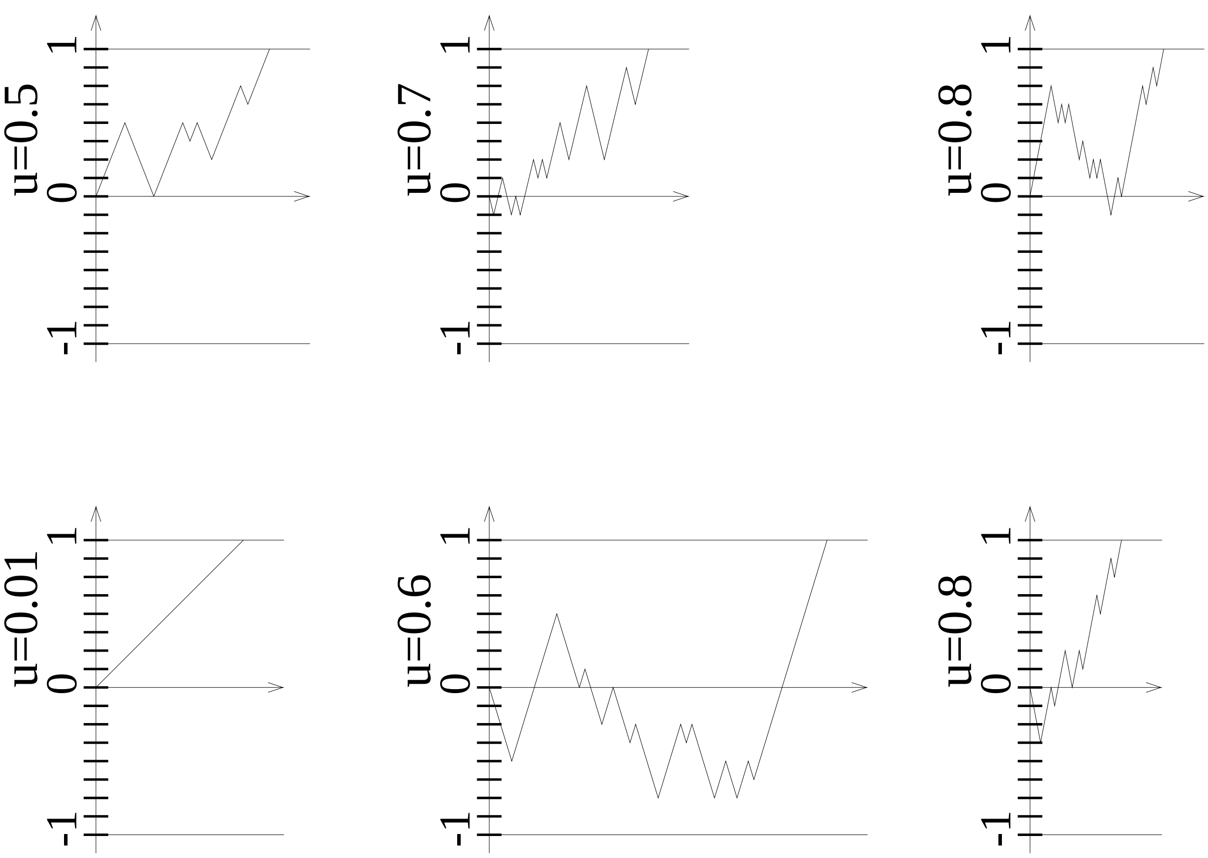
内挿は容易！ $\Phi_{u,1}(z) = \dfrac{z^2}{1-2u^2z^2}$

$\nu_u = \dfrac{\log 2}{\log \lambda_u}$, $\lambda_u = \Phi'_{u,1}(x_{c,u})$, $x_{c,u} = \Phi_{u,1}(x_{c,u})$

Displacement の指数を得るには反射原理が必要

・ くりこみ群を第一原理とすることで見つけた

・ Sierpiński gasket でもできる



5．結語.

解析手段としてのくりこみ群：観測精度のスケール変換（細かいギザギザを付け加えること）に対する系の応答.（マルコフ性と異なる新しい対象，新しい現象）

難関 (1) くりこみ群が無限次元 (infinitely ramified) $\mathbb{Z}^d$

難関 (2) スケール不変でない場合大局的な軌道の追跡．有限次元でも難しい．dSG 上の SAP(HHK'90–'93, HT'02)

成功例 (1) Hierarchical Ising 模型 (HHW '01) 良い無限次元

成功例 (2) 等方性の回復／漸近一次元拡散 (HHW, BHHW '94–'97)

一見著しく異なる発見を一つの視点から導けるならば，そこに一つの数学的手段があることを期待させる．くりこみ群は統計力学および場の量子論の理論物理学の分野で極めて多くの研究がなされた概念と計算手法を総称する用語である．しかし，くりこみ群なる解析手段の，満足な数学的定義はまだない，というのが講演者の認識である．

逆に言えば，ここに，これまで気づかれなかった何かがあるかもしれない．

（服部哲弥，日本数学会 2001.10 統計数学分科会特別講演アブストラクト）