フラクタル上の漸近的に一次元的な拡散過程

Asymptotically one-dimensional diffusions on fractals

服部　哲弥　(Tetsuya HATTORI)

宇都宮大学工学部　(Utsunomiya University)

1　序

この講演の目的は，我々が「漸近一次元」拡散過程と呼ぶ拡散過程を説明することである．この講演は服部久美子（東京大学教養学部）および渡辺浩（日本医科大学）との共同研究に基づく [7, 6, 9, 8].

漸近一次元拡散過程を導入した本来の目的は，我々が abc-gaskets と呼ぶフラクタルの族の上の拡散過程の存在を証明するためであったが，主要な内容は Sierpinski gasket で説明できるので，abc-gaskets については後で簡単にふれるにとどめる．Sierpinski gasket G は三角形を用いて作られる図形で，周知の無限に細かい構造を持つ（図 1）．以下，フラクタル図形は常に外方向には無限に延びているものを考える．微小構造が最小単位を持つような Sierpinski gasket の部分図形も必要になる（図 2）．これらを pre-Sierpinski gasket と呼ぶ．最小三角形の辺の長さが 2^{-N} の pre-Sierpinski gasket を F_N と書き，その頂点の集合を G_N とする．$G = \overline{\bigcup_{N=0}^{\infty} G_N}$である．各頂点毎に， F_N の辺で結ばれている４つの頂点を N-隣点と呼ぶ.

この研究では G_N 上の random walk の $N \to \infty$ 極限として Sierpinski gasket や abc-gaskets の上の拡散過程を構成する．Sierpinski gasket の上の拡散過程はすでに Kusuoka, Goldstein, Barlow-Perkins らによって random walk の極限として得られている [13, 4, 3]．彼らの構成した拡散過程を「固定点直上理論」と呼ぶことにすると，Lindstrøm は nested fractals と呼ばれるフラクタルの族に固定点直上理論を拡張した [14]．固定点直上理論はくりこみ群に非退化固定点が必要だが，abc-gaskets の中にはくりこみ群に非退化固定点のないフラクタルがあるので，固定点直上理論は abc-gaskets 一般に対しては適用できない．他方，漸近一次元理論はくりこみ群に不安定固定点が必要だが，フラクタルの部分集合としての一次元空間の上の拡散が不安定固定点に対応する場合が多いので，より一般のフラクタルに対して拡散を構成できる可能性がある．

構成方法	Sierpinski gasket	拡張	必要条件
固定点直上理論	[13, 4, 3]	nested fractals [14]	非退化固定点
漸近一次元理論	[7]	abc-gaskets [6, 7]	不安定固定点

くりこみ群の立場から Sierpinski gasket 上の漸近一次元理論と固定点直上理論の関係を図示することができる（図 5）．漸近一次元理論は構想においても証明においてもくりこみ群の描像が本質的な役割を果たす．くりこみ群との関係を中心に説明することで，研究会の主旨にかなうことを期待する．

2　パラメータ空間とくりこみ群

Pre-Sierpinski gasket G_N上の random walk を考える（図 2）．Random walk Z は遷移確率 $\{p_{x,y} = \mathrm{Prob}[\ Z(\ell+1) = y | Z(\ell) = x\ ]\}$ によって定まる．G_N上の可能な random walk の遷移確率 $\{p_{x,y}\}$ の全体を$\tilde{\mathcal{P}}_N$ と書くことにする．Sierpinski gasket は自己相似，即ち，スケール２のスケール変換（拡大縮小）に対して不変なので，G_nと G_Nの間の自然な $1:1$ 対応があり，従って Nの異なる G_Nの上の random walk の間に $1:1$ 対応がある．この対応により $\tilde{\mathcal{P}}_N$ を同一視して単に$\tilde{\mathcal{P}}$ と書くことにする．$\tilde{\mathcal{P}}$ は random walk を parametrize している．

次に random walk の decimation を説明する（図 3）．G_1上の random walk の sample path が訪れる G_0 の点を順に取り出すと G_0 上の path になる（続けて２度同じ G_0 の点を通ったら１回と数える）．この操作により G_0上の random walk が自然に定義できる．即ち，新しい G_0上の random walk の遷移確率 $p'_{x,y}$ は元の random walker が点 $x \in G_0$にいるとき，次に到達する $G_0 \setminus \{x\}$ の点が yである確率に等しい．同様に任意の $n \le N$ に対して， G_N 上の random walk に G_n 上の random walk を対応させる操作が定義できる．この操作を decimation と呼び，新しい random walk Z' を元の random walk Z の n-decimated walk と呼ぶ：

$$
\begin{aligned}
&Z'(i) = Z(T_{n,i}(Z))\,,\ i \in \mathbf{Z}_+\,;\\
&T_{n,0}(Z) = \inf\{t \ge 0 \mid Z(t) \in G_n\}\,,\\
&T_{n,i+1}(Z) = \inf\{t > T_{n,i}(Z) \mid Z(t) \in G_n \setminus \{Z(T_{n,i}(Z))\}\}\,,\ i \in \mathbf{Z}_+.
\end{aligned}
$$

考察の対象は次のような random walk である（図 4）．$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbf{R}_+^{\mathbf{3}} \setminus (0,0,0)$ に対して G_N上の random walk $Z_{N,\alpha}$ を次で定義する：各自然数時刻毎に $Z_{N,\alpha}$ は４つの N-隣点のどれかに移り，移動の相対確率は,

$$(\text{水平: } 60^\circ\text{: } 120^\circ)\ \text{方向への移動相対確率} = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$$

とする．Pre-Sierpinski gasket G_N の頂点は，ユークリッド平面内の平行移動によって，図 4 の３種類のどれかと一致する．例えば random walker が１型頂点にいるとき水平方向の隣点への移動確率は $\alpha_1/(2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ となる．このような random walk に対応するパラメータ空間 $\mathcal{P} \subset \tilde{\mathcal{P}}$ は

$$\mathcal{P} = \left\{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbf{R}_+^{\mathbf{3}} \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1\right\}$$

と同一視できる．$\mathcal{P}$ は，１歩毎に隣点にのみ移り，ブロック（三角形）間で遷移確率が等しい，対称な(「詳細釣り合いの原理」の成り立つ）random walk からなる空間になっている [7].

以上が decimation の概念と，考察する random walk の集合である．

Decimation は異なる N を持つ pre-Sierpinski gasket G_N 上の random walk 間の対応であったが, random walk は N に関係なく同じ $\mathcal{P}$ で parametrize されていたから，N から $N-1$ への decimation は $\mathcal{P}$ 上の写像を引き起こす．この写像を T と書き，T が定義する力学系をくりこみ群と呼ぶ[1]．T は因子２のスケール変換に相当する decimation に対する random walk 系の応答を表す．$T\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ であること，および T の具体形は，次の命題によって与えられる．

Proposition 1. 出発点が $Z(0) = x \in G_{N-1}$ のとき，$Z = Z_{N,\alpha}$ の *$(N-1)$-decimated walk* は出発点 $Z'(0) = x$ の $Z' = Z_{N-1,T\alpha}$ と同じ分布を持つ．ここで，写像 $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ は

$$
\begin{aligned}
&T\alpha = (C\,(\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3/3)\,,\ C\,(\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1/3)\,,\ C\,(\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2/3))\,,\\
&\frac{1}{C} = 1 + \frac{1}{3}(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1)\,,
\end{aligned}
$$

で定義される．

3　Random walk の極限としての漸近一次元拡散

次の２条件が成り立つように random walk

$$Z_N = Z_{N,\alpha_N} \tag{1}$$

の列を選ぶ：

(1) decimation 共変性:　$\alpha_{N-1} = T\,\alpha_N\,,\ N \in \mathbf{Z}$,

(2) 漸近一次元性:　$\lim_{N\to\infty} \alpha_N = (1,0,0) \in \mathcal{P}$.

この列の弱極限として確率過程 $\lim_{N\to\infty} Z_N([\lambda^N t])$ を得ることを考える．

[1]半群であるが，物理に出てくる類似の概念の慣習に従ってくりこみ群と呼ぶ.

Proposition 1 と decimation 共変性の条件から $n \le N$ ならば Z_n は Z_N の n-decimated walk になる．これは極限過程が存在するための consistency condition に相当する．

$N \to \infty$ がとれるためには，α_N は T の iterated map の値域の共通部分に入る必要がある：

$$\alpha_N = T\alpha_{N+1} \in \mathrm{Image}T = \cdots \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{Image}T^n .$$

T の具体形から必要条件として

$$\alpha_N = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \text{ または } \lim_{N\to\infty} \alpha_N \in \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$$

を得る．$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ は T の固定点である．[13, 4, 3] は α_N としてこの固定点を選んで拡散過程を構成した．それ故固定点直上理論と呼ぶ．固定点なので登場する random walk はスケール変換を除いて１種類となり，parameter space やくりこみ群 T は陽には必要なかった．残る選択肢が，我々が漸近一次元理論と呼ぶものである．α_N の極限として可能な３つは元のフラクタルを 120 度回すことで互いに移りあうので，$\lim_{N\to\infty} \alpha_N = (1,0,0)$ を考えればよい．条件は陽に解けて

$$\alpha_N \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1+2w_N)^{-1}\ (1, w_N, w_N)\,;\ 0 < w_0 < 1\,,\ w_{N-1} = \frac{4w_N + 6w_N^2}{3 + 6w_N + w_N^2}$$

となる[2]．この式から，Z_{N,α_N} の斜め方向への移動確率は $O\left(\left(\frac{3}{4}\right)^N\right)$ となるので，N が大きくなるほど random walk Z_{N,α_N} は水平方向に移動しやすくなる．それ故漸近的に一次元的な理論と名付けた．他方 decimation 共変性から，固定した n に対して n-decimated walk は固定されている．従って $N \to \infty$ で斜め方向の遷移の残る連続極限がとれることが期待できる．

図 5 がここまでの分析の要約である．パラメータ空間 $\mathcal{P}$ は合計すると 1 になる 3 つの非負実数の組と同一視できた．1 辺 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ の正三角形の各辺に下ろした垂線の長さの和は 1 になるので，$\mathcal{P}$ はこの三角形の内部と同一視できる．くりこみ群写像 T はこの三角形を自分自身の中に写す．重心が T の固定点であり，固定点直上理論に対応する．重心から 3 頂点に引いた 3 つの線分が $\bigcap_{N=0}^{\infty} \mathrm{Image}T^N$ を表し，「連続極限のとれる」部分空間である．T の flow に逆らって進むのが連続極限 $N \to \infty$ である．

以上で主結果を紹介する準備が整った．

Theorem 2. $x \in G$ とし，$\lim_{N\to\infty} x_N = x,\ x_N \in G_N$, を満たす点列 $\{x_N\},\ N \in \mathbf{Z}$, をとる．遷移確率を式 *(1)* 以下で定義し，出発点を $Z_N(0) = x_N,\ N \in \mathbf{Z}$ とした *random walk* の列 $Z_N,\ N \in \mathbf{Z}$ を考える．このとき $X_N(t) = Z_N([6^N t])$ によって定義された確率過程の列 $X_N,\ N \in \mathbf{Z}$, は $N \to \infty$ のとき出発点が $X(0) = x$ で G に値をとる連続な強マルコフ過程に弱収束する．X の分布は点列 $\{x_N\}$ の取り方によらない．X は $\int f\,d\mu = \frac{2}{3} \lim_{N\to\infty} 3^{-N} \sum_{x\in G_N} f(x)$ で定義される G 上の測度 μ に関して対称である．さらに X は *Feller* 過程[3]になる．

$X_N(t) = Z_N([6^N t])$ に出てくる $\lambda = 6$ という数字はくりこみ群の分析を実際の系（random walk）に翻訳し戻すときに鍵になる時間スケール因子で，Z_N が G_{N-1} の 2 頂点間を通り抜けるのに要する平均歩数を表す：即ち $Z_N(T_{0,0}(Z_N)) = x,\ Z_N(T_{0,1}(Z_N)) = y,\ N \in \mathbf{Z}_+$, なる条件付き確率に関する期待値 E' について，$W(Z) = T_{0,1}(Z) - T_{0,0}(Z)$ とおくとき，

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} E'[W(Z_N)]^{1/N}$$

で与えられる．固定点直上理論 [13, 4, 3] では $\lambda = 5$ なので，漸近一次元拡散とは本質的に異なる．

[2] $w_0 = 0$ は水平方向のみの移動となり，Sierpinski gasket の上の拡散になっていないので，除く（退化固定点）．

[3] P_x を X の分布，E_x を P_x に関する期待値とするとき，遷移半群 T_t： $(T_t\,f)(x) = E_x[f(X(t))]$ が有界連続関数の空間を不変にすること．

4 abc-gaskets

研究の動機となった abc-gaskets について簡単に紹介したい（図 6）．abc-gaskets は Sierpinski gasket を一般化したフラクタルの族である．

a, b, c を自然数とする．Sierpinski gasket が一つの三角形を一辺半分の 3 つの小さい三角形で置き換えることでつくられるように，abc-gasket は一つの三角形を図のように $a+b+c$ 個の小さい三角形で置き換えてつくる．２次元平面内では同じ大きさの正三角形で書くことができないが，例えば $\mathbf{R}^3$ の中に埋め込めば可能である．Sierpinski gasket は 111-gasket となる．

Theorem 3. *任意の abc-gasket に対して Sierpinki gasket と同様の方法で拡散を構成できる．パラメータ空間は Sierpinski gasket 同様* $\mathcal{P}$ *にとることができる．*

くりこみ群の具体形は

$$T\alpha \propto \left(\alpha + (AB + BC + CA)^{-1}(A, B, C)\right) \ ; \quad A^{-1} = a(\alpha_2 + \alpha_3)\,, \text{etc.}$$

となる．いくつかの重要な定数が Sierpinski gasket のときと異なるので掲げておく．表では $a^{-1} < b^{-1} + c^{-1}$ の場合のみ書いたが，他の場合も同様である．

	SG	abc-gaskets
時間スケール因子	6	$(a+1)(a+b+c)$
固定点への漸近速度	4/3	$(a+1)(b+c)/(bc+b+c)$

固定点直上理論と漸近一次元理論を比較する．固定点直上理論において，得られた拡散がフラクタルの全体に広がるためには付随する random walk 列が全ての隣点に確率正で移れる必要がある．この条件から，固定点直上理論に対応するくりこみ群の固定点はその全ての座標成分が正でなければいけない．Sierpinski gasket の場合，$\mathcal{P}$ 内では$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ が全成分正となる唯一の固定点である．全ての座標成分が正である固定点を非退化固定点と呼ぶことにする．固定点直上理論においては非退化固定点の存在が本質的であるが，その存在は自明ではない．Lindstrøm は nested fractals というフラクタル族を，正に，くりこみ群が非退化固定点を持つように定義した [14]．Nested fractals は非退化固定点の存在を保証するためにフタクタル図形に幾何的な条件を要請する．このような要請は，結果を一般的な図形に拡張する際に障害となる．自然界に見られる図形は幾何的に「崩れた」ところがあるのが普通である．

不動点定理が保証するのは退化固定点まで含めた固定点であり，非退化固定点の存在は図形の構造の詳細に依存する．このことを例示するべく [6] で abc-gaskets を導入した．abc-gaskets はくりこみ群の作用するパラメータ空間を既出の $\mathcal{P}$ にとった場合，$1/a$, $1/b$, $1/c$ が三角形条件を満たさなければくりこみ群は非退化固定点を持たない：

$$\exists\, \text{非退化固定点} \in \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c},\ \frac{1}{b} < \frac{1}{c} + \frac{1}{a},\ \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\,.$$

$$\Rightarrow \text{非退化固定点} \propto ((\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a})^{-1}, (\frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b})^{-1}, (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c})^{-1})\,.$$

非退化固定点の存在が図形の詳細に依存する難しい問題であることの例として，図 7 の一方は非退化固定点を持つがもう一方は退化固定点しかない．固定点直上理論が適用できないフラクタルは存在する．これが今回の研究の動機であった．

漸近一次元理論は不安定固定点があれば適用できる．固定点自体は退化していても，そこに漸近するくりこみ群の trajectory を利用するのでできあがった拡散はフラクタル全体に広がる．しかも，規則格子のような並進対称な場合を除けば，１次元拡散に対応する固定点はほかの方向へのわずかな摂乱に対して不安定なので不安定固定点になることが期待される．従って，より一般性がある．

技術的にも漸近一次元理論は固定点直上理論と異なる道具が必要になる．例えば，固定点直上理論では定常分枝過程の極限定理を利用できるが，漸近一次元理論では非定常分枝過程の極限定理が必要になる．そのような方向の研究の動機が今までなかったためか適当な結果がなかった [9]．漸近一次元理論は分枝過程の研究に新しい動機を与える．

5 問題と予想

得られた拡散の基本的な性質として拡散の遷移確率密度 $p_t(x,y)$ の存在と評価の研究がある．固定点直上理論に関しては Sierpinski gasket については [3] で，nested fractals に関しては [11] で，評価が得られており，概略

$$-\log p_t(x,y) \sim d_s \log t + (\text{pos. ct.}) \times \left(\frac{x^{d_w}}{t}\right)^{1/(d_J-1)}$$

という形の評価が得られている．d_s はスペクトル次元，d_w は walk の次元とそれぞれ呼ばれていて，フラクタル次元 d_f との間に $d_s = 2d_f/d_w$ の関係がある．d_J は d_w にさらにスケール変換の因子と隣のブロックまでの最短道のりの因子の log 比をかけた量で，Sierpinski gasket や abc-gaskets では d_w に等しい．Sierpinski gasket では $d_s = 2\log 3/\log 5$，および，$d_w = d_J = \log 5/\log 2$ である．

通常のユークリッド空間の拡散では次元によらず $d_w = 2$ であることは有名である．これは独立な分布の分散の加法性という分かりやすい説明があった．フラクタルの上の拡散ではこの性質が破れる点と，それにもかかわらず調べる方法（くりこみ群）があるという点で重要な意味がある．

漸近一次元理論では，スケール不変性がないので d_w が 2 種類になることと，スケールによって random walk の遷移確率が異なることが 'log correction' を与えることの 2 つの点でさらに複雑になる．予想は次の通り：

$$\begin{aligned}
&\text{水平方向} \quad -\log p_t(x,y) \sim d_s \log t + (\text{pos. ct.}) \times \left(\frac{x^{d_{w(UV)}}}{t}\right)^{1/(d_{J(UV)}-1)}, \\
&\text{斜め方向} \quad -\log p_t(x,y) \sim d_s \log t + (\text{pos. ct.}) \times \left(\frac{x^{d_{w(UV)}}}{t}\right)^{1/(d_{J(UV)}-1)} \log \frac{x}{t}.
\end{aligned}$$

Sierpinski gasket では $d_s = 2\log 3/\log 5$, $d_{w(UV)} = \log 6/\log 2$ となる．スケール不変性がないため d_w が $d_{w(UV)}$ と $d_{w(IR)}$ の 2 種類になる（d_J も同様）．関係式 $d_s = 2d_f/d_w$ は，$d_w \equiv d_{w(IR)}$ として成立する．

臨界次元におけるスピン系の統計力学では 'log correction' がつくことが理論物理学の常識である．また，現実の素粒子反応を説明し，かつ場の量子論の枠内で構成可能と信じられている理論は漸近自由理論と呼ばれていて，'log correction' が本質的であり，実験的にも確認されている．これらが，本研究の背景である [8].

自然界にあるフラクタルは自己相似性を近似的ないしは統計的にしか満たさないのが普通である．このような場合にも原理的に結果を拡張できる「打たれ強い」理論が望ましい．ブロック間対称性を崩すのは問題が複雑になりすぎるが，スケール毎にある程度ランダムに図形を選ぶことは可能性がある．可能な図形各々についての非退化固定点の存在を気にしなくてよいのが漸近一次元理論の強みである．

Sierpinski gasket の固定点直上理論に関しては拡散過程 X が O から出発するとき，分布の意味で $2^{-1}X(5t) = X(t)$ となるが，漸近一次元理論ではどんなλをとっても $2^{-1}X(\lambda t) \neq X(t)$ である．そこで，次の 2 種類のスケーリング極限が問題になる．

(1) IR scaling limit $\quad \lim_{N\to\infty} 2^{-N}X(\lambda^N t)$

(2) UV scaling limit $\quad \lim_{N\to\infty} 2^{N}X(\lambda^{-N} t)$

くりこみ群の分析から次のことが予想される：$\lambda = 5$ とおいて IR-limit をとれば [13, 4, 3] の拡散過程に弱収束する．これが正しければ，彼らの構成法の別証明を得る．UV-limit は一次元的な現象に近づくのは確かだが，くりこみ群の分析からはまともな選択は $\lambda = 6$ しかあり得ないのに，一次元 Brown 運動ならば $\lambda = 4$ でなければならない．

参考文献

[1] M. T. Barlow, R. Bass, *Construction of Brownian motion on the Sierpinski carpet.* Ann. Inst. Henri Poincaré **25** (1989) 225-257.

[2] M. T. Barlow, R. Bass, *Coupling and Harnack inequalities for Sierpinski carpets.* Preprint.

[3] M. T. Barlow, E. A. Perkins, *Brownian Motion on the Sierpinski Gasket,* Probab. Th. Rel. Fields **79** (1988) 543-623.

[4] S. Goldstein, *Random walks and diffusion on fractals,* IMA Math. Appl. **8** (1987) 121-129.

[5] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the three dimensional Sierpinski carpet,* To appear in Publ. RIMS **29** (1993).

[6] K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Gaussian field theories on general networks and the spectral dimensions,* Progr. Theor. Phys. Spplement **92** (1987) 108-143.

[7] K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Asymptotically one-dimensional diffusions on the Sierpinski gasket and the abc-gaskets,* Submitted to Probability Theory and Related Fields.

[8] T. Hattori, *Construction of asymptotically one-dimensional continuous Markov process on Sierpinski gasket,* RIMS Kokyuroku **783** (1992) 46-64.

[9] T. Hattori, H. Watanabe, *On a limit theorem for non-stationary branching processes,* in E. Cinlar et al. (eds.), *Seminar on Stochastic Processes, 1992,* Birkhauser, Boston, 1993, 173-187.

[10] J. Kigami, *Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets,* Trans. Amer. Math. Soc. **1335** (1993) 721-755.

[11] T. Kumagai, *Estimates of the transition densities for Brownian motion on nested fractals,* To appear in Probab. Th. Rel. Fields.

[12] T. Kumagai, *Regularity, closedness and spectral dimensions of the Dirichlet forms on p.c.f. self-similar sets,* To appear in J. Math. Kyoto Univ.

[13] S. Kusuoka, *A diffusion process on a fractal,* Proc. Taniguchi Symp. (1987) 251-274.

[14] T. Lindstrøm, *Brownian motion on nested fractals,* Mem. Amer. Math. Soc. **420** (1990) 1-128.

[15] H. Osada, *Self-similar diffusions on a class of infinitely ramified fractals,* preprint.