服部哲弥
20010916–22;1017;23;20020108;15;20;

ベクトル解析　演習問題

この演習問題集では，断らずに以下の記号を用いる．

- 自然数の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$，非負整数の集合 $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$，整数の集合 $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$，有理数の集合 $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$，実数の集合 $\mathbb{R} = \{\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \mid a_n \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N};\ \sup_n a_n < \infty\}$，非負実数の集合 $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 0\}$，複素数の集合 $\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
- $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 等は，断らなければ §1 では $\mathbb{R}^2$ の要素，§2 では $\mathbb{R}^3$ の要素を表し，ベクトルと呼ぶ.

  §2 では空間ベクトル $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ に対して，

  $$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

  は外積を表す.
- $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ に対して，$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$ は内積，$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$ はノルムを表す.
- この他，断らなければ §1 では平面 $\mathbb{R}^2$ の中で，§2 では３次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中で考える.
- 平面ベクトル場に関連して，断らなければ平面上の点を $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ 等と書き，ベクトル場 $\mathbf{u}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対してその P での値を $\mathbf{u}(P) \in \mathbb{R}^2$ 等とも書く．空間ベクトル場に関しても同様である.
- 平面上の曲線とは，閉区間 $[a, b]$ から $\mathbb{R}^2$ への連続写像 (の像) のことをいう．即ち，$\mathbb{R}^2$ の部分集合であって，$[a, b]$ 上で定義された連続関数でパラメータ表示できるものを曲線とよぶ．パラメータ表示が $1:1$ にとれるとき $1:1$ 曲線，$\dfrac{d\,\mathbf{u}}{dt}(t) \neq (0, 0)$, $t \in [a, b]$, を満たす C^1 級関数がパラメータ表示として取れるとき滑らかな曲線とよぶ．特に問題がなければ，定義域として有界閉区間の代わりに片側あるいは両側無限区間を許すこともある．空間上の曲線も同様である.

  断らなければ $\mathbf{n}$ は曲線の単位法ベクトルを表す.
- §A も参照.
- この他，特に第１章から第２章前半にかけて，**断らずに実数 ($\mathbb{R}$ または $\mathbb{R}^2$) の微積分学の記号や結果を使う**こともある.

1　平面上のベクトル解析.

1.1　平面ベクトルと平面ベクトル場.

[1]　$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ のなす角を θ とすると，$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$ であることを確かめよ.（記号については前書きを参照.）

[**2**]　次の平面ベクトル場を図示せよ.

(1) $\mathbf{V}(P) = (1, 0)$, $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
(2) $\mathbf{V}(P) = (x, y)$, $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
(3) $\mathbf{V}(P) = (y, -x)$, $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
(4) $\mathbf{V}(P) = (-y, x)$, $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

[**3**]　次の平面ベクトル場を図示せよ.

(1) $\mathbf{V}(x, y) = (x, 0)$
(2) $\mathbf{V}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$
(3) $\mathbf{V}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$
(4) $\mathbf{V}(x, y) = \left(\frac{y^2 - x^2 + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \frac{2xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \right)$

1.2　線積分．

[**4**]　集合 $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2(x + 1)\}$ が曲線であることを示し，図示せよ．C は滑らかな曲線か？(即ち，滑らかなパラメータ表示はあるか？)

[**5**]　次の集合が 1 : 1 滑らかな曲線であることを，そのようなパラメータ表示を与えることで示せ.

(1) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos x + y = 0\}$
(2) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 4y^2 = 1\}$
(3) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ye^x = 1\}$

[**6**]　円 $u_1^2 + u_2^2 = 1$ のパラメータ表示（反時計回り一周）を見つけて，その長さを求めよ.

[**7**]　以下のベクトル場 $\mathbf{V}$ と曲線 C について,

(1) 線積分 $\displaystyle\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u}$ を計算せよ.
(2)

$$\left| \int_C \mathbf{V}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u} \right| \leqq \int_C \|\mathbf{V}(\mathbf{u})\| \, ds(\mathbf{u}).$$

を確かめよ．但し，右辺はスカラー場の線積分を表す.

(3) 同じ関数の線積分で積分経路 (曲線) の端点が同じでも，途中の経路で積分値が異なる場合と途中の経路に（この問の範囲で）よらない場合があることを確認せよ.

(1) $\mathbf{V}(x,y)=(x,0)$，C: $(0,0)$ から $(1,0)$ への線分と $(1,0)$ から $(1,1)$ への線分をつないだもの.
(2) $\mathbf{V}(x,y)=(x,0)$，C: $(0,0)$ から $(0,1)$ への線分と $(0,1)$ から $(1,1)$ への線分をつないだもの.
(3) $\mathbf{V}(x,y)=(y,0)$，C: $(0,0)$ から $(1,0)$ への線分と $(1,0)$ から $(1,1)$ への線分をつないだもの.
(4) $\mathbf{V}(x,y)=(y,0)$，C: $(0,0)$ から $(0,1)$ への線分と $(0,1)$ から $(1,1)$ への線分をつないだもの.
(5) $\mathbf{V}(x,y)=(y,x)$, C: $(1,0)$ と $(0,0)$ を結ぶ線分.
(6) $\mathbf{V}(x,y)=(y,x)$, C: $(x(t),y(t))=(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$, $0\leqq t\leqq T$.（$T>0$.）
(7) $\mathbf{V}(x,y)=(y,-x)$, C: $(1,0)$ と $(0,0)$ を結ぶ線分.
(8) $\mathbf{V}(x,y)=(y,-x)$, C: $(x(t),y(t))=(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$, $0\leqq t\leqq T$.（$T>0$.）
(9) $\mathbf{V}(x,y)=(x,y)$, C: 円 $x^2+y^2=1$，反時計回り一周.
(10) $\mathbf{V}(x,y)=(y,x)$, C: 円 $x^2+y^2=1$，反時計回り一周.
(11) $\mathbf{V}(x,y)=(-y,x)$, C: 円 $x^2+y^2=1$，反時計回り一周.

[8] $\mathbf{V}(x,y)=(2x,3x+y)$ で定義されるベクトル場と $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4}x^2+y^2=1\}$ で定義される曲線 C に対して $\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}$ を計算せよ．但し C の向きは標準的な向き（反時計回り１周）とする.

[9] ベクトル場 $\mathbf{u}$ を $\mathbf{V}(x,y)=(x,y)$ で，平面内の曲線 $C:\ (-\infty,0]\to\mathbb{R}^2$ を $t\mapsto(e^t\cos t, e^t\sin t)$, $t\leqq 0$, で，それぞれ定義するとき，線積分 $\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}$ を計算せよ.

1.3 grad とポテンシャル.

[10] f, g をスカラー場とするとき，$\operatorname{grad} fg = f\operatorname{grad} g + g\operatorname{grad} f$ を示せ.

[11] (1) $\mathbf{V}(x,y)=(y,x)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, は勾配ベクトル場であることを示せ.
(2) $\mathbf{V}(x,y)=(-y,x)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, は勾配ベクトル場でないことを示せ.

1.4 rot と Green の定理．

[12] 放物線 $y=x^2$ の接ベクトルと法ベクトルを求めよ．

[13] 次の曲線の接ベクトルと法ベクトルを求めよ．

(1) 楕円 $C=\left\{(x,y) \mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\right\}$.

(2) 双曲線 $C=\left\{(x,y) \mid \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\right\}$.

[14] C を $1:1$ 滑らかな閉曲線，$\mathbf{V}$ をベクトル場とし，$P \in C$ によらない定数 $a>0$ が取れて $\|\mathbf{V}\|(P) \leqq a$ が任意の $P \in C$ で成り立つとする．C の長さを $|C|$ とおくと，$\left|\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{u})d\mathbf{u}\right| \leqq a|C|$ が成り立つことを示せ．

[15] 次のベクトル場 $\mathbf{u}$ を図示し，回転 $(\mathrm{rot}\,\mathbf{u})$ を求めよ．

(1) $\mathbf{u}(x,y)=(x,y)$.
(2) $\mathbf{u}(x,y)=(y,-x)$.
(3) $\mathbf{u}(x,y)=\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
(4) $\mathbf{u}(x,y)=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2},\ \dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$.

[16] $f:\ (0,\infty)\to\mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上で定義されたベクトル場 $\mathbf{V}(x,y)=(-y\,f(\sqrt{x^2+y^2}),x\,f(\sqrt{x^2+y^2}))$ が $\mathrm{rot}\,\mathbf{V}(x,y)=1$ を $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で満たすとき，f の形を求めよ．

[17] (1) $\mathbf{V}(x,y)=\frac{1}{2}(-y,x)$ のとき $\mathrm{rot}\,\mathbf{V}$ を計算せよ．
(2) $\mathbf{V}$ が (C^1 級の) 勾配ベクトル場のとき $\mathrm{rot}\,\mathbf{V}=0$ となることを証明せよ．

[18] (1) 原点中心半径 1 の円を $(1,0)$ から反時計回りに 1 周する閉曲線について

$$\int_D dxdy=\frac{1}{2}\int_{\partial D}(-y\,dx+x\,dy)=\frac{1}{2}\int_{\partial D}x\,dy-\frac{1}{2}\int_{\partial D}y\,dx$$

を確かめよ．

(2) 原点中心半径 1 の円の上半分を $(1,0)$ から $(-1,0)$ まで進んで $(1,0)$ に戻る区分的に $1:1$ 滑らかな閉曲線について $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_C x\,dy - \dfrac{1}{2}\int_C y\,dx = 0$ を確かめよ.

[19] $U \subset \mathbb{R}^2$ を領域 (連結開集合) とし，写像 $F = (f_1, f_2) \colon U \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ が与えられているとする．U 上のベクトル場 $\mathbf{V}_F = \dfrac{1}{f_1^2 + f_2^2}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x} f_2 - \dfrac{\partial f_2}{\partial x} f_1,\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y} f_2 - \dfrac{\partial f_2}{\partial y} f_1\right)$ を考える.

(1) U 上 $\operatorname{rot} \mathbf{V}_F = 0$ を示せ.

(2) $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < \frac{3}{2}\}$，$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$ のとき，$\mathbf{V}_F$ を計算せよ.

(3) $\mathbf{u}(t) = (\cos t, \sin t)$ でパラメータ表示された曲線と上の $\mathbf{V}_F$ に対して $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathbf{V}_F(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u}$ を計算せよ.

(4) F を全平面に滑らかに拡張できないこと，即ち，$\hat{F} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ なる C^∞ 級写像で U 上で F に一致するものが存在しないこと，を証明せよ.

[20] $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqq 1\}$，および，$\mathbf{V}(x,y) = \dfrac{1}{(x-1)^2 + y^2}(-y, x-1) - \dfrac{1}{(x+1)^2 + y^2}(-y, x+1)$ とおく．また，C_1 を半円 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4,\ x \geqq 0\}$ と y 軸の一部 $\{(0,y) \mid -2 \leqq y \leqq 2\}$ を合わせた閉曲線，C_2 を閉曲線 $\{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 = 16\}$，とおく.

(1) $\mathbf{V}_2(x,y) = \dfrac{1}{(x+1)^2 + y^2}(-y, x+1)$ とおくとき，$\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{V}_2(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u} = 0$ を示せ.

(2) $\mathbf{V}_1(x,y) = \dfrac{1}{(x-1)^2 + y^2}(-y, x-1)$ とおくとき，$\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{V}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u} = \int_{C_2} \mathbf{V}_1(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u}$ を示せ.

(3) C^∞ 級関数 $f \colon U \to \mathbb{R}$ が存在して U で $\operatorname{grad} f = \mathbf{V}$ が成り立つことを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(f(0, \frac{1}{n}) - f(0, -\frac{1}{n})\right) = \int_{C_1} \mathbf{V}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u}$ を示し，また，この値を求めよ.

[21] $C, C_n, n \in \mathbb{N}$, を閉曲線とし，それらのパラメータを $\mathbf{u} \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u}_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, とする．関数 $\mathbf{u}_n$ は $\mathbf{u}$ に一様収束しているとする．また，$\mathbf{V}$ を $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場とする.

(1) $\dfrac{d\,\mathbf{u}_n}{dt}$ が $\dfrac{d\,\mathbf{u}}{dt}$ に一様収束するとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \mathbf{V}(\mathbf{u}_n) \cdot d\mathbf{u}_n = \int_C \mathbf{V}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u}$ が成り立つことを示せ.

(2) $\epsilon > 0$ に対して以下を満たす領域 $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^2$ が存在することを示せ：C から距離 ϵ 以下の点は全て Ω_ϵ に含まれ，距離 2ϵ より大きい点は含まれない．ϵ によらない定数 A が存在して，Ω_ϵ の面積[1]は $C\epsilon$ 以下.

[1] [5, 演習問題 1.9 (2)] では体積と書いてあるが，面積の誤植.

(3) $D \subset \Omega_\epsilon$ なる任意の領域 D に対して ϵ によらない A が存在して $\left|\int_D \mathrm{rot}\,\mathbf{V}\,dx\,dy\right| \leqq A \sup_{(x,y)\in D} \|\mathrm{rot}\,\mathbf{V}(x,y)\|\,\epsilon$ となることを示せ.

(4) Ω_ϵ は滑らかな境界を持つとし，内側の境界を C_ϵ とする．グリーンの公式を用いて $\left|\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{u} - \int_{C_\epsilon} \mathbf{V}\cdot d\mathbf{u}\right| \leqq A \sup_{(x,y)\in D} \|\mathrm{rot}\,\mathbf{V}(x,y)\|\,\epsilon$ を示せ.

(5) $\sup_{t\in[0,1]} |\mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}(t)| < \epsilon$ ならば

$$\left|\int_{C_n} \mathbf{V}\cdot d\mathbf{u}_n - \int_{C_\epsilon} \mathbf{V}\cdot d\mathbf{u}\right| \leqq A \sup_{(x,y)\in D} \|\mathrm{rot}\,\mathbf{V}(x,y)\|\,\epsilon$$

となることを示せ.

(6) $\dfrac{d\,\mathbf{u}_n}{dt}$ が $\dfrac{d\,\mathbf{u}}{dt}$ に一様収束するという仮定を追加しなくても，$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \mathbf{V}_n\cdot d\mathbf{u} = \int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{u}$ が成り立つことを示せ.

[22] Planimeter (Amsler の面積計) を実際に使って面積を測ってみて，planimeter の原理が実際の装置でどのように実現しているかを確認せよ.

1.5 div と Gauss の定理.

[23] 次のベクトル場 $\mathbf{u}$ を図示し，発散 (div) を求めよ.

(1) $\mathbf{u}(x,y) = (-y, x)$.
(2) $\mathbf{u}(x,y) = (x, y)$.
(3) $\mathbf{u}(x,y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ $((x,y) \neq (0,0))$.
(4) $\mathbf{u}(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ $((x,y) \neq (0,0))$.
(5) $\mathbf{u}(x,y) = (x\log\sqrt{x^2+y^2}, y\log\sqrt{x^2+y^2})$ $((x,y) \neq (0,0))$.

[24] $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で定義されたベクトル場 $\mathbf{V}(x,y) = (xf(\sqrt{x^2+y^2}), yf(\sqrt{x^2+y^2}))$ が $\mathrm{div}\,\mathbf{V}(x,y) = 0$ を $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で満たすための f の条件（満たすべき微分方程式）を求めよ.

さらに k を実定数として $f(r) = r^k$, $r > 0$, ならば k はいくらか？

[25] f を C^1 級スカラー場， $\mathbf{V}$ を C^1 級ベクトル場，とするとき以下を証明せよ.

(1) $\mathrm{div}(f\,\mathbf{V}) = (\mathrm{grad}\,f)\cdot\mathbf{V} + f\,\mathrm{div}\,\mathbf{V}$

(2) $\mathrm{rot}(f\,\mathbf{V}) = (\mathrm{grad}\, f) \times \mathbf{V} + f\ \mathrm{rot}\,\mathbf{V}$
ここで，2次元ベクトル $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$, $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ に対して，$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = U_1V_2 - U_2V_1$ とおいた．

[26] f を C^2 級スカラー場，$\mathbf{V}$ を C^2 級ベクトル場，とするとき以下を証明せよ．

(1) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0$
(2) $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

[27] **問 [23]** の各ベクトル場 $\mathbf{V}$ に対して，

(1) 原点を中心とする単位円
(2) $(\pm 1, \pm 1)$ を 4 頂点とする正方形

それぞれを C とするとき，$\displaystyle\int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds$ を計算せよ．

[28] **問 [23]** の各ベクトル場 $\mathbf{V}$ について原点を中心とする単位円に関して Gauss の定理を確かめよ．但し，$(0,0)$ で定義されていないベクトル場については，原点の周りに小さな半径 ϵ の穴を開けた領域で Gauss の定理を確かめよ．

1.6 座標変換．

[29] 角度 θ の座標回転，即ち，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(x', y') \\ y(x', y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

で定義される変数変換，とベクトル場 $\mathbf{V}$ に対して $\mathrm{rot}\,\mathbf{V}$ はどう変換されるか？

[30] ベクトル場 $\mathbf{V}$ の法線成分の線積分 $\displaystyle\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}\, ds(\mathbf{u})$ は座標の回転でどうなるか？

[31] スカラー場 f とベクトル場 $\mathbf{V}$ に対して $\mathrm{grad}\, f$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{V}$ を極座標で書き直してみよ．

2　空間上のベクトル解析．

2.1　空間ベクトルと空間における grad, div, rot．

[32]　「$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\in\mathbb{R}$ の方向は $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が作る平行四辺形に垂直で，向きは $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}\times\mathbf{v}$ が右手系を作り，大きさは，$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が作る平行四辺形の面積に等しい」という主張を，$\mathbf{u}=(1,0,0)$ とし，$\mathbf{v}$ を $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ から選ぶとき，それぞれについて $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ を計算して確かめよ．

[33]　(1) $\mathbf{u}=(1,1,2)$, $\mathbf{v}=(2,0,1)$, $\mathbf{w}=(1,0,3)$ について $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$, $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u})$, $\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$, $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$, $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ を計算せよ．(記号の定義は前書きを参照.)
(2) 上の例で $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ は大きさが 3 つのベクトルが作る平行六面体の体積であることを確認せよ．

[34]　$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\leqq\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{v}\|$ であることを証明せよ．等号が 0 以外の値で成り立つ具体例を挙げよ．

[35]　3 つの空間ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ に対して

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$$

を証明せよ．

[36]　$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}\neq 0$ となるのは 3 つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ がどのような関係にあるときか？

[37]　$\mathbf{u}\neq\mathbf{0}, \mathbf{v}$ を 3 次元ベクトルとし，$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$ とするとき，$\mathbf{v}=\mathbf{u}\times\mathbf{w}$ を満たす $\mathbf{w}$ が存在することを示せ．

[38]　$\mathbf{u}, \mathbf{v},$ を 3 次元ベクトル，A を 3×3 行列，${}^t\tilde{A}$ を A の余因子行列とするとき，$\tilde{A}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=A\mathbf{u}\times A\mathbf{v}$ を示せ．

[39]　f, g を C^1 級スカラー場，$\mathbf{U}, \mathbf{V}$ を C^1 級ベクトル場，とするとき以下を証明せよ．

(1) $\mathrm{grad}(f\,g) = (\mathrm{grad}\,f)\,g + f\;\mathrm{grad}\,g$
(2) $\mathrm{div}(f\,\mathbf{V}) = (\mathrm{grad}\,f)\cdot\mathbf{V} + f\;\mathrm{div}\,\mathbf{V}$
(3) $\mathrm{rot}(f\,\mathbf{V}) = (\mathrm{grad}\,f)\times\mathbf{V} + f\;\mathrm{rot}\,\mathbf{V}$
(4) $\mathrm{div}(\mathbf{U}\times\mathbf{V}) = (\mathrm{rot}\,\mathbf{U})\cdot\mathbf{V} - \mathbf{U}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{V}$
(5) $\mathrm{rot}(\mathbf{U}\times\mathbf{V}) = (\mathbf{V}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{U} + \mathbf{U}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{V}) - (\mathbf{U}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{V} - \mathbf{V}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{U})$

[**40**]　f を C^2 級スカラー場，　$\mathbf{V}$ を C^2 級ベクトル場，とするとき以下を証明せよ．

(1) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,f = 0$
(2) $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
(3) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = \mathbf{0}$
(4) $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathbf{V}) - (\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta V_z)$

2.2　曲面と面積分．

[**41**]　球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ に対して，球面極座標表示に基づくパラメータ

$$\varphi(s,t) = (\cos s\ \sin t, \sin s\ \sin t, \cos t)$$

は $U = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < s < 2\pi,\ 0 < t < \pi\}$ における局所パラメータを与える．U の外に出ると，$1:1$ でなくなるので，U がこれを局所パラメータとするぎりぎり一杯の広さである．$U = S^2 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqq 0,\ y = 0\}$ なので，残りの部分を覆うには，例えば $\varphi_2(s,t) = (\cos s\ \sin t, \cos t, \sin s\ \sin t)$ を $U_2 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < s < \pi,\ 0 < t < \pi\}$ で考えればよい．
　以上を確かめよ．

[**42**]　$\varphi(s,t) = (s^2, t^2, st)$ のとき，φ のヤコビ行列 $D\varphi$ の rank が 2 でない点を求め，その点の近くの φ の像を図示せよ．

[**43**]　$(0,0,1)$ を頂点，$x-y$ 平面内の $C = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2=1\}$ を底面，　z 軸を軸，とする円錐で頂点と底面を除いた「側面」は曲面である．この曲面の座標系を求めよ．

[**44**]　$S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^3+z^4 = 0\}$ は $(0,0,0)$ の近くで曲面でないことを示し，$(0,0,0)$ の近くの S を図示せよ．

[45] 平面 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=d\}$ に対して以下を証明せよ.

(1) 平面上の点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in S$ を 1 つ任意に取ってきて固定すると，S の点 $(x,y,z)\in S$ は全て $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ を満たす.

(2) S の**全ての**点 P に対して，P_0 を始点とし P を終点とするベクトルに直交するベクトル $\mathbf{v}$ は，定ベクトル (a,b,c) と $\mathbf{v}$ に応じて決まる実数 $\lambda\in\mathbb{R}$ を用いて $\mathbf{v}=\lambda(a,b,c)$ と書ける．つまり，一次独立なものは 1 つしかない.

(3) 空間の中の平面は，その上の 1 点 P_0 と 2 次元線型空間 (ベクトル空間) で定まる．即ち，平面は一次独立な 2 つ一組のベクトルで張られ，一次独立な 2 つのベクトルは平面を張る.

[46] $S=\{(x,y,z)\mid x^2+\dfrac{1}{4}y^2+\dfrac{1}{9}z^2=1\}$ の各点での接平面，法ベクトルを求めよ.

[47] $f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を C^1 級関数とし，$\varphi(s,t)=(s,t,f(s,t))$ で $\varphi:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を定義する．φ を座標に持つ曲面を S とするとき，S の接平面と法ベクトルを f を用いて書け.

[48] 球面 $S^2\subset\mathbb{R}^3$ (の一部) の 2 種類の座標 $\varphi:\ U\to\mathbb{R}^3$；$U=\{(s,t)\mid 0<s<2\pi,\ 0<t<\pi\}$，$\varphi(s,t)=(\cos s\,\sin t,\ \sin s\,\sin t,\ \cos t)$，および $\varphi'':\ U''\to\mathbb{R}^3$；$U''=\{(s,t)\mid s^2+t^2<1\}$，$\varphi''(s,t)=(s,t,\sqrt{1-s^2-t^2})$，の間の座標変換，即ち，2 つの座標の重なり $W\subset U$，$W''\subset U''$ の間の全単射 $\psi:\ W\to W'$ で $\varphi''\circ\psi(s,t)=\varphi(s,t),\ (s,t)\in W$ を満たすもの，を求めよ.

[49] **問** [41] に与えた球面のパラメータ系は標準的な向きを保つか？

[50] メビウスの帯 E は面積 $\displaystyle\int_E dS$ が存在するが，E の上のベクトル場 $\mathbf{V}$ の面積分 $\displaystyle\int_E \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$ は定義できない．この違いを説明せよ．その説明に基づいて，スカラー場 f の面積分 $\displaystyle\int_E f\,dS$ はどうかを結論せよ.

[51] 単位球面の上半分 $S=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1,\ z>0\}$ とベクトル場 $\mathbf{V}(x,y,z)=(x,y,z)$ に対して，面積分 $\displaystyle\int_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$ を，次の 2 種類の座標を用いてそれぞれ計算せよ.

(1) $\varphi:\ U \to \mathbb{R}^3;\ U = \{(s,t) \mid -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2},\ 0 < s < \pi\}$,
$\varphi(s,t) = (\sin t, \cos s\ \cos t, \sin s\ \cos t)$
(2) $\varphi'':\ U'' \to \mathbb{R}^3;\ U'' = \{(s,t) \mid s^2 + t^2 < 1\},\ \varphi''(s,t) = (s, t, \sqrt{1 - s^2 - t^2})$

[52] 定義に基づいて，単位球面 (**問** [**41**]) の面積を計算せよ．

[53] $(0,0,1)$ を頂点，$x-y$ 平面内の $C = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2=1\}$ を底面，z 軸を軸，とする円錐の側面を S とおく．$\mathbf{V}(x,y,z) = (0,0,1),\ (x,y,z) \in S$, に対して面積分 $\displaystyle\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ を計算せよ．

2.3 Gauss の発散定理と Green の公式．

[54] 円柱 $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |z| < 1,\ x^2+y^2 < 1\}$ に対してガウスの定理

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{V}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS.$$

を講義録 [4, ガウスの定理] の証明にならってたしかめよ．

[55] $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1\}$，$S = \partial\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$，とし，$\mathbf{V}:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\mathbf{V}(x,y,z) = (x,y,z)$ で定義する．

このとき，$\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{V}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ および $\displaystyle\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ をそれぞれ定義に基づいて計算せよ．それによってガウスの定理を確かめよ．

[56] $\mathbf{V}:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\mathbf{V}(x,y,z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}(x,y,z)$ で定義する．但し，$\alpha > 0$ は定数とする．

このとき，原点がその内部にあるような閉曲面 S に対して $\displaystyle\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ を求めよ．

[57] $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2+y^2+z = 1,\ z \geqq -3\}$，$\mathbf{V}(x,y,z) = (3yz+7y+x, y, z+3)$，のとき $\displaystyle\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ を計算せよ．法ベクトルの向きを選んで明記せよ．

[58] $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+4z^6 = 4,\ z \geqq 0\}$ および $\mathbf{V}(x,y,z) = (e^y, z, x^2)$ のとき $\displaystyle\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ を計算せよ．

2.4 Stokes の定理．

[59] 次の領域の中で単連結なものはどれか.

(1) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^4 + y^2 + z^2 < 2\}$
(2) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + z^4 < 2\}$
(3) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
(4) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$

[60] メビウスの帯

$$S = \{((2 + t\cos\frac{s}{2})\ \sin s,\ (2 + t\cos\frac{s}{2})\ \cos s,\ t\sin\frac{s}{2}) \mid s \in \mathbb{R},\ |t| < 1\}$$

の境界を ∂S，そのパラメータ表示を $\mathbf{m}$ とする．$\mathbf{V}$ を S を含む領域で定義されたベクトル場で $\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0$ を満たすものとする．さらに，パラメータ $\mathbf{u}(s) = (2\sin s, 2\cos s, 0)$ で与えられる閉曲線 C をとる． ∂S の向きを適当に選ぶことで $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{V}\cdot d\mathbf{m} = 2\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{u}$ が成り立つことを示せ.

[61] $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ なる (連結だが単連結ではない) 領域において，$\mathbf{V}(x, y, z) = \dfrac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$, $(x, y, z) \in \Omega$, で定義されるベクトル場は， Ω の各点で $\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0$ を満たすが，C が xy 面内の原点を中心とする単位円 $\{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を反時計回りするとき，$\displaystyle\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}$ は 0 にならないことを計算で確かめよ.

[62] $\mathbf{V}(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3}(x, y, z)$ とおくと，$\mathbf{V}$ は $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ で定義されている.

このとき， xy 面内の閉曲線 $C = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を境界に持つ 2 つの曲面 $S_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1,\ z \geqq 0\}$, $S_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1,\ z \leqq 0\}$, について面積分

$$\int_{S_i} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dS, \quad i = 1, 2,$$

を考える.

(1) もし， $\mathbf{V}$ が $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ でベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を持つならば,

$$\int_{S_1} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_{S_2} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

でなければならないことを証明せよ.

(2) 定義に基づいて $\displaystyle\int_{S_i} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dS$, $i = 1, 2$, を計算することで $\mathbf{V}$ はベクトルポテンシャルを持たないことを証明せよ.

Appendix.

A　復習．

A.1　関数の連続性と関数列の収束．

[63]　(1) $a,\ b$ を N によらない正定数とするとき，$\dfrac{1}{a+bN^2} = O(N^{-2}),\ N \to \infty,$ を証明せよ．
(2) 任意の正定数 $k>0$ に対して $e^{-N} = O(N^{-k}),\ N \to \infty,$ を証明せよ．

[64]　$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続関数であること，即ち，

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n)(\forall \epsilon > 0)\ \exists \delta > 0;\ (\forall y \in \mathbb{R}^n)\ \ \|x-y\| < \delta\ \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon$$

と,「$A \in \mathbb{R}$ が開集合ならば必ず $f^{-1}(A)$ が開集合になること」が同値であることを証明せよ．

[65]　(1) $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続関数ならば，収束する任意の数列 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$ が成り立つことを証明せよ．
(2) f が連続関数でなければ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$ が成り立つとは限らないことを示す実例を挙げよ．

[66]　$\mathbb{R}$ の閉区間 $[a,b]$ の中の点列 $a_1, a_2, \cdots$ は $[a,b]$ の中に集積点を持つことを示せ．

[67]　(1) $\mathbb{R}$ の開区間 $(0,1)$ 上の実数値関数で，連続だが一様連続でない関数の例を挙げよ．
(2) 有界閉区間 $I=[a,b]$ 上の実数値連続関数 $f:\ I \to \mathbb{R}$ は一様連続であることを証明せよ．

[68]　閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f は最大値を持つ，即ち，ある $a \leqq x_0 \leqq b$ が存在して，$f(x) \leqq f(x_0),\ a \leqq x \leqq b,$ が成り立つ．このことを証明せよ．

[69]　(1) 開区間 (a,b) で定義された連続関数で最大値を持たないものの例を挙げ，最大値を持たないことを説明せよ．

(2) 閉区間 $[a,b]$ で定義された (連続とは限らない) 関数で，最大値を持たないものの例を挙げ，最大値を持たないことを説明せよ．

[70] 開区間または閉区間 I 上で定義された連続関数の列 $f_n:\ I \to \mathbb{R},\ n=1,2,3,\cdots,$ の広義一様収束極限は連続関数であることを証明せよ．

[71] 開区間または閉区間 I 上で定義された連続関数の列 $f_n:\ I \to \mathbb{R},\ n=1,2,3,\cdots,$ の各点収束極限は連続関数とは限らないことを示す例を挙げよ．

A.2 テーラーの定理．

[72] f を $\mathbb{R}^2$ の開集合で定義された C^2 級関数とする．極座標 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ による表示，即ち，$g(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおくとき，

(1) $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ と $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で表せ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ と $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ で表せ．

A.3 リーマン積分．

[73] Δ が閉区間 $[a,b]$ の分割であるとは，自然数 n と $[a,b]$ の長さ $n+1$ の点列 $a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$ があって $\Delta=\{t_0,\cdots,t_n\}$ であることをいう．このとき $|\Delta| = \sup\limits_{i\in\{1,\cdots,n\}}(t_i-t_{i-1})$ を分割 Δ の幅という．

f が有界閉区間 $[a,b]$ 上定義された区分的に連続な実数値関数ならば

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$$

が (有限値で) 存在する（分割 Δ の列や代表点 $\{\xi_i\}$ の列の取り方によらない）ことを示せ．但し，$\{\xi_i\}$ は $t_{i-1}\leqq \xi_i \leqq t_i,\ 1\leqq i\leqq n,$ を満たす範囲で動く．

（この極限値 $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ を (リーマン) 積分と呼ぶ.）

[74] 有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数の列 $f_n,\ n \in \mathbb{N}$, が一様収束するならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

となることを証明せよ.

[75] 重積分の計算方法には，主に逐次積分による方法と積分変数変換による方法がある．このうち前者について以下の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xe^{-y}\,dx\,dy,\ D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy,\ D = \{(x,y) \mid y \geqq 0,\ 0 \leqq x^2+y^2 \leqq x\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy,\ D = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq \pi/2\}$

(4) $\displaystyle\iint_D e^{-x+y}\,dx\,dy,\ D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq x \leqq 1\}$

[76] 変数変換を利用して以下の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy,\ D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,\ D = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1\}$

(3) $\displaystyle\iint_D y^2\,dx\,dy,\ D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 2x\}$

A.4 線型代数.

断らない限り， $\mathbb{R}^n$ は次の最初の問の意味で $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなす.

n, m を 2 以上の整数とする．n 行 m 列の行列の階数 (rank) が 2 とは行と列から 2 つずつ選んで 2×2 部分行列 (小行列) を取り出すとき，そのような ${}_n\mathrm{C}_2 \times {}_m\mathrm{C}_2$ 個の小行列のうち少なくとも 1 つはその行列式が 0 でないこと，即ち，その小行列が逆行列を持つことをいう.

[77] $\mathbb{R}^n$ は，成分毎の和に基づく加法と，各成分を定数倍するスカラー倍によって，$\mathbb{R}$ を係数体 (通常の和と積による体とする) とする線型空間 (ベクトル空間) であることを確認せよ.

即ち，ベクトルの加法について可換群をなすこと，スカラー倍について結合法則と 1 倍が元に戻ること，そしてスカラー倍と加法について分配法則 (2 種類) が成り立つこと，を示せ.

（きりがないので,）$\mathbb{R}$ が通常の和と積によって体になっていることは使ってよいことにする.

[78] (1) $\mathbb{R}^3$ で $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と線型独立なベクトルを１つ挙げよ．
(2) そのようなベクトルの一般形を求めよ．

[79] (1) $\mathbb{R}^n$ は何次元のベクトル空間か？理由をつけて答よ．
(2) $\mathbb{R}^3$ の基底を一組挙げよ．

[80] (1) $\mathbb{R}^2$ の 1 次元部分ベクトル空間の例を挙げよ．
(2) $\mathbb{R}^2$ の部分集合だがベクトル空間でない例を挙げよ．

[81] (1) $\mathbb{R}^n$ の２つの要素 $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)$, に対して $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$ とおくとき，これが内積になること（双線型な 2 変数実数値関数であって，非負値性と一意性を満たすもの）を確かめよ．
(2) $(1, 1, 1)$, $(2, -1, 0)$ が $\mathbb{R}^3$ の中で張る線型空間の正規直交基底をシュミットの直交化によって求めよ．

[82] $n \geqq 2$ を整数とする． n 行 2 列の行列 $A = (a_{ij})$ が rank 2 であることと，A の 2 つの列が作る 2 つの列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$ が一次独立であることは同値であることを証明せよ．

A.5 位相．

以下，$n \in \mathbb{N}$ (空間次元) は自然数の定数とする．断らない限り，$x \in \mathbb{R}^n$ と $i = 1, \cdots, n$ に対して x の第 i 成分を x_i と書く．即ち， $x = (x_1, \cdots, x_n)$.（本編では $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ の要素を $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ と書いていたので記号が違うことに注意.）

$d\colon\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ で非負値，一意性 ($d(x, y) = 0$ if and only if $x = y$)，対称性，三角不等式，を満たすものを $\mathbb{R}^n$ 上の距離という．

特に， $d_2(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ をユークリッド距離と呼ぶことにする．$x \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対して $\mathbf{Ball}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r\}$ を (開) 球と言う．

$\mathbb{R}^n$ では，断らなければユークリッド距離が定める位相，即ち開球たちを全て集めた集合族を開基とする位相，を考える．即ち， $A \subset \mathbb{R}^n$ が開集合であるとは

$$(\forall x \in A)\ \exists r > 0;\ \mathbf{Ball}(x, r) \subset A$$

が成り立つことであると定義する．また，開集合とは限らない集合 D について $\exists r > 0;\ \mathbf{Ball}(x, r) \subset D$ が成り立つ $x \in D$ を D の内点と言う．

$D \subset \mathbb{R}^n$ に対して D^c を D の補集合，D^o を内部 (内点の集合)，という．D の内部でも D^c の内部でもない点を D の境界と言う．

「$c \in \mathbb{R}^n$ と $E \subset \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，$r > 0$ をどのように小さくとっても $\mathbf{Ball}(c, r) \cap (E \setminus \{c\}) \neq \emptyset$」であるときに c を E の集積点という．元の集合の点と集積点を全て集めた集合を $\overline{E}$ と書いて閉包という．

[83] (1) ユークリッド距離は距離であることを確かめよ．
(2) $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} |x_i - y_i|$ は距離であることを確かめよ．

[84] $A \subset \mathbb{R}^n$ が開集合であることと，A が開球の和集合で書けること，即ち，ある開球の集合族 $\{\mathbf{Ball}(x_\lambda r_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ が存在して $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{Ball}(x_\lambda, r_\lambda)$ と書けること，が同値なことを証明せよ．

[85] 可算個の開集合の共通部分が開集合になるとは限らないことを具体例を挙げて説明せよ．

[86] $D \subset \mathbb{R}^n$ とするとき，以下を証明せよ．

(1) $x \in \mathbb{R}^n$ について， x が D の集積点であることと $x \in \overline{D \setminus \{x\}}$ となることは同値．
(2) $\overline{D} = ((D^c)^o)^c$,
(3) $\partial D = \overline{D} \cap \overline{D^c}$.
(4) $D^o = D \setminus \partial D$.
(5) $(D^c)^o = \overline{D}^c = D^c \setminus \partial D$
(6) D が閉集合であることと $D = \overline{D}$ は同値.（自力で証明を試みるならば，中間段階として，D の任意の収束する点列の極限が D に入ることと同値であることを示してもよい.）

[87] (1) $\mathbb{R}^n$ が開集合でありかつ閉集合であることを示せ．
$\mathbb{R}^n$ の部分集合で開集合かつ閉集合であるものは他にあるだろうか？
(2) $\mathbb{R}^n$ の連結な部分集合で開集合でも閉集合でもないものを１つあげて，それがどちらでもないことを証明せよ．

参考文献

[1] 安達忠次，ベクトル解析，培風館.

[2] 高木貞治，解析概論，岩波書店，第５章.

[3] 中西敏浩，解析学序論講義ノート，2001 年度前期.

[4] 服部哲弥，ベクトル解析講義ノート，2001 年度後期，ver. 20010519.

[5] 深谷賢治，電磁場とベクトル解析，現代数学への入門 17，岩波書店.