ベクトル解析 vector.tex
服部哲弥
20010412;20;23;25;28–0507;09–19;0917-19;22;23;1017;1127;1204;
20020108;15; 20061107;

ベクトル解析

目 次

0 イントロ.

0.1 諸データ.

予備知識：大学１年までの数学の諸科目，特に，微積分学と線型代数学の基礎.

目標：多変数関数の積分は変数の数が増えるほど難しくなるが，被積分関数が特別な場合に簡単になることがある．例えば，複素関数は実 2 変数関数と位相的には同じことだが，その中で正則関数は複素線積分が経路によらない．実線積分でも，被積分関数が勾配ベクトル場ならば経路によらない．ベクトル解析はこのような「実積分が簡単になる」多変数関数を扱う．

(1) 2, 3 次元ユークリッド空間上の関数 (スカラー場やベクトル場) の微積分学.
(2) ユークリッド空間上の微積分学から曲線・曲面上の微積分学への橋渡し.

この講義の特徴：

(1) 既修の講義とのつながり，特に，多変数関数の積分の基礎事項を重視する.
(2) 他変数関数の微積分学と曲線や曲面上の積分という幾何的な視点を結びつけることに重点を置く．余裕があれば，得られる結果は，物理学などで公式として結果だけ学んだかも知れないことに言及する.
(3) 既に盛りだくさんなこと，および，他の講義が用意されていることも考えて，空間曲線 (曲率，ねじれ率) と微分形式については触れる余裕はない.

目次：

参考書の役割：この講義ノートは [5] に基づく．但し，多変数の微積分学とのつながりを重視した点は講義ノートの特徴である．また，この講義で既知とする基礎事項をまとめた §A はこの講義ノートの特徴である．他方，[5] の囲み記事にある興味深い進んだトピックスは全て省略した.

0.2　何がおもしろいか．

複素関数論の基礎の講義¡!– (数学基礎 V) –¿で，複素線積分は定義上は途中の経路によるが，関数によっては始点と終点だけで決まり途中の経路によらない場合があること，そのような関数を正則関数と呼ぶこと，を知っている.

例えば，C の始点を $a \in \mathbb{C}$, 終点を $b \in \mathbb{C}$ とするとき，$\displaystyle\int_C z\,dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ は途中の経路によらないが，$\displaystyle\int_C \overline{z}\,dz$ は途中の経路による．(例えば $a = 0$, $b = 1 + \sqrt{-1}$, とのとき，C_1 をまず実軸 ($y = 0$, $0 \leqq x \leqq 1$) に沿って，次に虚軸に平行に b までの折線，C_2 をまず虚軸 ($x = 0$, $0 \leqq y \leqq 1$) に沿って，次に実軸に平行に b までの折線，とすると，

$$\int_{C_1} \overline{z}\,dz = \int_0^1 x\,dx + \sqrt{-1}\int_0^1 (1 - \sqrt{-1}y)\,dy = 1 + \sqrt{-1}\,,$$
$$\int_{C_2} \overline{z}\,dz = \sqrt{-1}\int_0^1 -\sqrt{-1}y\,dy + \int_0^1 (x - \sqrt{-1})\,dx = 1 - \sqrt{-1}\,,$$

となって，経路による.）

正則関数の線積分が経路によらないのはコーシーの積分定理の言い換えである．コーシーの積分定理は，(ジョルダン) 閉曲線 C に対して複素関数 f が C を含む単連結領域で正則ならば $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ となる，という主張である．始点が a，終点が b の 2 つの曲線 C_i , $i=1,2$, に対して，これをつないで 1 周閉曲線としたものを $C = C_1 - C_2$ と書くと，コーシーの積分定理から

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} - \int_{C_2} f(z)\,dz = 0,$$

即ち $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$ を得る．

複素数は $\mathbb{R}^2$ と自然に対応している．しかし，積分は「底辺 (線素) かける高さ (関数の値)」で定義するので，かけ算が入るから，代数構造が複素数か実数かで違う値になる．それでは，一般の $\mathbb{R}^n$ の実積分について，線積分が経路によらないということが広い範囲の関数に対して期待できるだろうか？

例えば $\mathbb{R}^2$ において次の線積分を考える．

$$\int_C \frac{y^2 - x^2 + 1}{(x^2+y^2+1)^2}\,dx - \frac{2xy}{(x^2+y^2+1)^2}\,dy. \tag{1}$$

C の始点，終点をそれぞれ (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ とすると，この積分の値は途中の経路によらずに[1]

$$\frac{b_1}{b_1^2 + b_2^2 + 1} - \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2 + 1} \tag{2}$$

に等しくなる！

納得がいくまで具体的な曲線についてこのことを確かめてみるのが教育的だろうが，先を急いで「正しい理由」を説明する．$V(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2+1}$ によって 2 変数実数値関数 $V\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を定義すると，(1) は

$$= \int_C \frac{\partial V}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}(x,y)\,dy$$

と書ける．曲線 C がパラメータ表示 $(x(s), y(s))$, $s \in [0,1]$, で定義されているとする．特に，$(x(0), y(0)) = (a_1, a_2)$, $(x(1), y(1)) = (b_1, b_2)$．線積分の定義から，

$$= \int_0^1 \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x(s), y(s))\, x'(s) + \frac{\partial V}{\partial y}(x,y)\, y'(s) \right) ds$$

と書ける．被積分関数に合成関数の微分法則を使うと，

$$= \int_0^1 \frac{d}{ds} V(x(s), y(s))\, ds$$

となる．ここで常微分は，$V(x,y)$ に $(x,y) = (x(s), y(s))$ を代入して，s の 1 変数関数としてから微分する意味である[2]．1 変数関数の微分と積分の関係から

$$= V(x(s), y(s))|_0^1 = V(x(1), y(1)) - V(x(0), y(0)) = V(b_1, b_2) - V(a_1, a_2)$$

となって，(2) を得る．

このように，線積分が途中の経路によらないような被積分関数 (2 変数 $\mathbb{R}^2$ 値関数 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) は，ある．そして，上記の証明を見ると，そうなる鍵は，2 変数関数 $V\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が存在して被積分関数が $\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial y} \right)$ と書けることにある．

従って，次の問題は，いつ 2 変数 $\mathbb{R}^2$ 値関数 $(f_1, f_2)\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ がこの形に書けるか，である．ここでも，本当は若干の試行錯誤が教育的だろうが，先を急いで「正解」を書く．まず，コーシーの積分定理のよ

[1] この講義では曲線等は十分ななめらかさを仮定する．例えばギザギザすぎて長さが無限の曲線ではそもそも線積分の定義が問題になるが，そういうことには立ち入らない．そういう曲線に意味がないという意味ではなく，この講義で扱う「微分幾何学的描像」はなめらかな図形の性質から得られたものだという意味である．

[2] 以下，この注意を省略する．

うに，積分路によらないという事実を (単純) 閉曲線に関する積分は 0 である，と読み替える．単純閉曲線 C はその内部の面 S の境界 $C = \partial S$ だから，

$$\int_{\partial S} f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy = 0 \ (?)$$

ということである[3]．これに関して次の事実が知られている：

$$\int_{\partial S} f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy = \int_S \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy.$$

この公式がこの講義の主題である．

この公式は $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の線積分について書いてあるが，関数の定義域に関しても値域に関しても任意の次元に拡張される (Stokes の定理や Gauss の定理)．この講義では $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^3$ の場合について扱う．

ちなみに，これらの公式を一般次元で統一的に記述する微分形式という方法がある.（これは $\mathbb{R}^n$ を「曲げて張り合わせた」多様体上の微積分学の記述にも有効に利用される普遍的な数学的記述である.）その背後には，微分や積分という一見座標に依存している操作のある種の組み合わせは (座標に依存しないという意味で) 幾何学的な量である，という事実がある．この講義では一般論までは踏み込まない．主に $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ で具体的に計算することで，この種の特別な，計算しやすい,（しかし，計算しやすい根拠が幾何学的内容という普遍性に基づく）, 微積分に親しむことを目標とする．ベクトル解析という言葉は，習慣的には，概ねこのような低次元での Stokes や Gauss の定理の周辺を指しているようである．一般性のある記述（微分幾何，多様体論）については，さらに進んだ講義や教科書等の文献を参照いただきたい．

関数 (一般には多成分) の積分が積分の端点 (一般には境界) だけにより，途中の経路 (一般には積分範囲) によらないとき，端点の関数としての積分を (被積分関数の) ポテンシャルという．一般に，古典力学の第一原理の基礎法則はポテンシャルを持つ関数を力とする (偏) 微分方程式で書かれているので，ベクトル解析は理論物理学と深い関係にある．

この講義ではそのようなことにも立ち入ることはできない．

1　平面上のベクトル解析．

1.1　平面ベクトルと平面ベクトル場．

1.1.1　平面ベクトル．

実数の集合を $\mathbb{R}$，とし，実数 2 つ $(u_1, u_2 \in \mathbb{R})$ を一組にした量 (u_1, u_2) を全て集めた集合を $\mathbb{R}^2$ とする：$(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$．$\mathbb{R}^2$ は実線型空間 (実ベクトル空間) の構造を持つ §A.4.1.

ベクトルを表す記号は，$\overrightarrow{u}$ と $\mathbf{u}$ がよく使われるが，この講義では $\mathbf{u}$ を用いる．即ち，$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ であって，$\mathbf{u} + \mathbf{v}$ や $c\mathbf{u}$ という演算 (線型演算) を意識する．

平面ベクトルは $\mathbb{R}^2$ の要素なので，平面上の点と対応する．通常，原点からこの点までを結んだ矢印でベクトルを表す[4]．

$\mathbb{R}^2$ は内積 $\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{u_2}$ を持つ線型空間である．内積に対して $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ によってベクトルのノルム (大きさ) が定義される．

良く知られているように，$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ のなす角を θ とすると，$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta$.

1.1.2　平面ベクトル場．

2 変数実数値関数 2 つ $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，を一組にすると，2 成分 2 変数関数，あるいは $\mathbb{R}^2$ 値 2 変数関数を得る：$(f, g)\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$．これは，$\mathbb{R}^2$ 上の各点 $(x, y) \in \mathbb{R}$ 毎にベクトル $(f(x, y), g(x, y)) \in \mathbb{R}$

[3] '?' を入れたのは，これがどのような (f_1, f_2) に対して起きるか，という問いの意味を込めた．

[4] ベクトル空間を一つ考えるときは平面上の点に対応させれば十分だが，§1.1.2 で，平面上の各点毎にベクトル空間を一つずつ考えることになる．そのとき矢印を使う理由がより切実になる．

が一つずつ定まるということである．この意味で $\mathbb{R}^2$ 値 2 変数関数 (ベクトル値 2 変数関数) のことを (平面・2 次元) ベクトル場という．

定義域 $\mathbb{R}^2$ の点を P 等とし，各 $P=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 毎に，ベクトルが決まるという意味で $\mathbf{u}(P)=(f(x,y),g(x,y))$ と書いて，ベクトル場を $\mathbf{u}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，その P での値を $\mathbf{u}(P)\in\mathbb{R}^2$，等と書く．

平面上にベクトル場 (ベクトル値関数) を図示するのに，ベクトルを矢印で図示する方法が便利である．$\mathbf{u}(P)$ を P を始点 (原点) とするベクトルで表すことにする．こうすると，定義域の点を平面上の点で，関数値 (値域の点) を矢印で，同時に表示できるから便利である．

各点毎に $\mathbf{u}(P)$ が決まるから，無数の矢印を描かないといけないが，通常は代表的な点だけを図示する．

問 1 以下のベクトル場を図示せよ．

(1) $\mathbf{u}(x,y)=(x,0)$.
(2) $\mathbf{u}(x,y)=(y,-x)$.
(3) $\mathbf{u}(x,y)=(-y,x)$.
(4) $\mathbf{u}(x,y)=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$.
(5) $\mathbf{u}(x,y)=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$.
(6) $\mathbf{u}(x,y)=\left(\dfrac{y^2-x^2+1}{(x^2+y^2+1)^2},\dfrac{2xy}{(x^2+y^2+1)^2}\right)$.
(§0.2 の平面ベクトル場の例．)

◇

ベクトル場 (ベクトル値関数) を全て集めた集合は，各点毎に値の線型演算を考えることにより，実数値関数を係数体とする線型空間をなす．例えば， $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, を実数値関数，$\mathbf{u}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, をベクトル場，とするとき，$f\mathbf{u}+g\mathbf{v}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ というベクトル場は $(f\mathbf{u}+g\mathbf{v})(P)=f(P)\mathbf{u}(P)+g(P)\mathbf{v}(P)$, $P\in\mathbb{R}^2$, で定義される．

さらに，ベクトル場に対して，記号 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を各点毎の $\mathbb{R}^2$ の内積で定義する：$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(P)=\mathbf{u}(P)\cdot\mathbf{v}(P)$ [5].

1.2 線積分．

線積分とは平面上の 1 次元積分のことをいう．1 次元といったのは，平面上の曲線を 1 つの実数でパラメータ表示したとき，そのパラメータで積分するという意味．$\mathbb{R}$ 上の定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と同様に符号 (積分の向き) がついている（cf. 重積分).

1.2.1 曲線．

平面上の**曲線**とは，閉区間 $[a,b]$ から $\mathbb{R}^2$ への連続写像 (の像) のことをいうことにする．即ち，その曲線のパラメータ表示が連続関数にとれることをもって曲線とよぶことにする[6]．この講義では，断らなければ $a,b\in\mathbb{R}$，即ち，パラメータの定義域を有界閉区間とする．(非有界領域の境界のように無限長の曲線を考える場合にはそのように断る[7]．そのような場合でも，この講義では有限の a,b で考えて，そのすなおな

[5] 計量線型空間としての内積は，特に，自分自身との内積の平方根が非負実数値（ノルム）を与えるべきものなので， $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ という内積のような記号を使っているけれども，内積と呼ぶのはイメージがよくないかもしれない．
内積の公理を満たす内積をベクトル場に対して定義するには，双対空間（ベクトル場の集合上の線型汎関数）を考える必要があり，とりあえず本文で定義したものとは全く違う話になる．本文の内積みたいな記号は，この講義での，特に $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場での，便宜上の記号と軽く考えておくほうがいいと思う．

[6] [5, 注意 1.7] では，道，と呼ぶことにしている．本によって同じ単語の定義が微妙に違うのは悩ましいが，ここで細かい違いに拘泥しすぎるのはこの講義の目標に反するので，新たに単語を導入せず，えいやっと本文のように決める．

[7] 以下で定義することだが，例えば曲線の長さが有限，ということをいうのにパラメータ表示において微分の有界性が必要なので，例えば $s=\tan t$ を使っても $b=\infty$ と $b\in\mathbb{R}$ を同時に扱えない場合がある．

極限として理解できる (即ち局所的には有限長の曲線である) 場合しか出てこない.）閉曲線の場合は有限長のものしか考えないので a, b が有限の場合のみとする.

写像 (パラメータ表示) が C^r 級 (r 階微分可能で r 階導関数が端点も込めて連続) のときC^r **級曲線**という．以下，曲線のパラメータ表示 $\mathbf{u}:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ の導関数を

$$\frac{d\,\mathbf{u}}{dt}(t) = \left(\frac{d\,u_1}{dt}(t),\ \frac{d\,u_2}{dt}(t) \right)$$

などと書く.

パラメータ表示が $1:1$ のとき**単純曲線**ということにする[8]

a での値 ($\mathbb{R}^2$ 上の点) と b での値が等しいとき**閉曲線**，さらに写像が (両端 a, b での一致を除いて)$1:1$ のとき，**単純閉曲線**または**Jordan 閉曲線**という.

線積分を定義するだけなら，単純曲線までで十分なはずだが，弧長による表示や $\mathbb{R}^2$ 内での曲線の滑らかさを議論するときは，不十分である.

例 2 $\mathbf{u}(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, は C^1 級曲線だが，像としての曲線は原点で「角張っている」 *[5, 例 1.24]*. (t を消去すれば明らか.） ◇

[2, §40] にならって，曲線が C^1 級[9]，かつ,

$$\frac{d\,\mathbf{u}}{dt}(t) \neq (0,0), \quad t \in [a,b], \tag{3}$$

なるとき，**滑らかな曲線**，ということにする.

命題 1 *(3)* は $1:1$ かつ C^1 級のパラメータとして各点で実際の空間のいずれかの座標 x または y をとることができることを保証する.

即ち，$1:1$ で滑らかな曲線は，各点毎にその近傍で $1:1$ かつ C^1 級のパラメータとして平面の座標の成分の 1 つ *(x または y)* をとることができる.（点毎に x が許されなかったり y が許されなかったりすることはあっても，どちらかはその点を含むある区間で滑らかなパラメータである.）弧長によるパラメータ表示や曲線の向きを決める際に *(3)* が有効なのはこのため.

曲線が C^r 級で $1:1$ 滑らかならば，x または y が C^r 級の $1:1$ 滑らかなパラメータになる.

証明. $\mathbf{u}(t) = (x(t), y(t))$ とする．(3) より $x'(t_0) \neq 0$ または $y'(t_0) \neq 0$ である．一方をやれば他方は同様なので $x'(t_0) \neq 0$ とすると，$t = t_0$ の近くで単調なので，$x_0 = x(t_0)$ の近くで逆関数 $t = x^{-1}(x)$ が存在し，逆関数の微分法則定理 38 から C^r 級である．従って， $\mathbf{u}(x^{-1}(x)) = (x, y(x^{-1}(x))$ はそこで $1:1$ かつ C^r 級パラメータ表示である．(3) (ただし，パラメータ t は x に置き換える）は明らか.

□

滑らかな閉曲線も同様に定義する.

曲線と言うとき連続性だけはパラメータの閉区間上の全ての点で要請する．しかし，導関数に関する条件は有限個の点を除いても以下のたいがいの定理が成り立つ．パラメータ表示が有限個の点を除いて 1 次式のとき折れ線という．特に，折線で単純閉曲線のとき多角形という．また，有限個の点を除いて C^r 級，かつ，導関数の，除外点での右及び左極限がそれぞれ存在するとき区分的に C^r 級曲線という．区分的に滑らかな曲線ということも同様に定義する．例 2 は $(0,0)$ で滑らかではないが，問題になる点が 1 点だけなので区分的に滑らかな曲線である.

[8]詳しく言うと，ある平面上の集合が単純曲線とは，$1:1$ のパラメータ表示が存在するような曲線である，ことをいう，という意味を含む．同じ集合を表すのに $1:1$ でない，連続ですらない，パラメータ表示もとれるが，連続 $1:1$ なパラメータ表示が一つとれれば十分である．この種の注意を以後省略する.

[9][5, 定義 1.23] では微分の連続性どころか C^∞ 級であることまで仮定しているし，この講義の趣旨からも微分の階数には拘泥しなくてよいが，現実問題として，せいぜい C^2 級まで仮定すれば，ベクトル解析の基礎事項には十分である．それ以外の点では，この講義の「 $1:1$ で滑らかな曲線」は，[5, 定義 1.23] の「滑らかな開曲線」と同じことである.「滑らかな閉曲線」という用語も同様の注意が当てはまる.

なお，この講義では単純閉曲線と言うときは 1 周のみを考える．[5, §1.3] では，同じわっかの上を何周もすることも閉曲線と呼んでいるが，この講義では区分的に $1:1$ の閉曲線と呼ぶものがこれに相当する.

この講義では，簡単のため (区分的に)1 : 1 で滑らかな曲線または閉曲線のみを扱う.

問 3 $C = \{(x, y) \mid y^2 = x^2(x+1)\}$ で定義される曲線の絵を描け．C は滑らかな曲線か？*(*即ち，滑らかなパラメータ表示はあるか？*)* ◇

1.2.2 曲線の長さ.

$\mathbf{u} = (u_1, u_2)\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}^2$ で表される曲線 C の長さ $L(C)$ を,

$$L(C) = \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{u}(t_i) - \mathbf{u}(t_{i-1})\| \tag{4}$$

で定義する．ここで右辺は Δ が $[a, b]$ の分割全体を動くときの上限の意味.

定理 2 C が区分的に 1 : 1 で滑らかな曲線ならば，曲線の長さ $L(C)$ は *(*有限に*)* 存在し，曲線のパラメータ表示 $\mathbf{u}\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *(*ただし，区分的に 1 : 1 で滑らか*)* の選び方によらずに

$$L(C) = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{u}(t_i) - \mathbf{u}(t_{i-1})\| \tag{5}$$

（右辺の極限は分割の幅が 0 になる極限），および,

$$L(C) = \int_a^b \left\| \frac{d\,\mathbf{u}}{dt}(t) \right\| dt = \int_a^b \sqrt{u_1'(t)^2 + u_2'(t)^2}\, dt \tag{6}$$

が成り立つ．特に，弧長は加法性を持つ．即ち $a \leqq c \leqq b$ のとき，C のうち $t \in [a, c]$, $t \in [c, b]$, に対応する部分をそれぞれ C_1, C_2 とすると， $L(C) = L(C_1) + L(C_2)$.

証明. $\mathbf{u}$ が微分可能なので，(実 1 変数) 関数のテーラーの定理 (定理 34) から,

$$\mathbf{u}(t_i) - \mathbf{u}(t_{i-1}) = \frac{d\,\mathbf{u}}{dt}(\xi_i)\,(t_i - t_{i-1}), \quad t_{i-1} < \xi_i < t_i, \tag{7}$$

を満たす ξ_i が任意の組 $t_{i-1} < t_i$ に対して存在する．よって，(4) において

$$L(C) = \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{d\,\mathbf{u}}{dt}(\xi_i) \right\| (t_i - t_{i-1})$$

となる $\xi_i = \xi_{\Delta, i}$ の列がとれる．$\mathbf{u}$ が C^1 だから $\left\| \dfrac{d\,\mathbf{u}}{dt}(t) \right\|$ は連続．よって 定理 40 から

$$L(C) = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{d\,\mathbf{u}}{dt}(\xi_i) \right\| (t_i - t_{i-1}),$$

即ち（(7) によって），(5) を，さらに 定理 41 から (6) を，得る.

あとは，この積分がパラメータ表示の取り方によらないことを言えばよい．C の 1 : 1 で C^1 級の滑らかなパラメータ表示の中から 2 つとって $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ とする．1 : 1 で連続だから，全射狭義単調増加関数 $h\colon\ [a, b] \to [a, b]$ があって，$\mathbf{u_2}(t) = \mathbf{u_1}(h(t)), t \in [a, b]$．どちらも微分が消えないから，$h$ は連続（背理法で考えてみよ）．(5) から

$$\int_a^b \left\| \frac{d\,\mathbf{u_2}}{dt}(t) \right\| dt = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{u_2}(t_i) - \mathbf{u_2}(t_{i-1})\| = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{u_1}(h(t_i)) - \mathbf{u_1}(h(t_{i-1}))\|.$$

$h\colon\ [a, b] \to [a, b]$ は全射狭義単調だから，$\Delta = \{t_i\}$ が $[a, b]$ の分割のとき $\Delta' = \{h(t_i)\}$ も分割．h は有界閉区間 $[a, b]$ 上連続だから一様連続 (定理 32) なので，$|\Delta| \to 0$ のとき $|\Delta'| \to 0$．よって再び (5) から上式は

$$\int_a^b \left\| \frac{d\,\mathbf{u_2}}{dt}(t) \right\| dt = \int_a^b \left\| \frac{d\,\mathbf{u_1}}{dt}(t) \right\| dt$$

となる．即ち，パラメータの選び方によらない．

□

問 4 以下の単純閉曲線のパラメータ表示（反時計回り一周）を見つけて，その長さを求めよ．

(1) 円 $u_1^2 + u_2^2 = 1$.
(2) 楕円 $\dfrac{u_1^2}{a^2} + \dfrac{u_2^2}{b^2} = 1$．但し，$a$, b は正定数.

◇

1.2.3 スカラー場の線積分．

$\mathbb{R}^2$ 上の実数値関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ のことを，ベクトル場 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ との対比でスカラー場と呼ぶこともある．曲線の長さの定義を延長してスカラー場の線積分を定義する．

C は $\mathbf{u}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ で定義される曲線，$f\colon C \to \mathbb{R}$ は連続関数とする．

分割 $\Delta = \{t_i\}$ と $t_{i-1} < \xi_i < t_i$, $i = 1, \cdots, n$, に対して

$$S_{\Delta,\xi} = \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{u}(\xi_i))\, \|\mathbf{u}(t_i) - \mathbf{u}(t_{i-1})\| \tag{8}$$

とおき，分割の幅 $|\Delta| \to 0$ としたときの極限値 $S = \lim\limits_{|\Delta|\to 0} S_{\Delta,\xi}$ がもしあれば，それを $S = \displaystyle\int_C f(\mathbf{u})\, ds(\mathbf{u}) = \int_C f\, ds$ と書いて，C に沿った f の線積分という．

定理 3 *f が連続関数で C が区分的に $1:1$ で滑らかな曲線ならば，線積分は存在し，曲線のパラメータ表示 $\mathbf{u}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ (ただし，区分的に $1:1$ で滑らか) の選び方によらず，*

$$\int_C f(\mathbf{u})\, ds(\mathbf{u}) = \int_a^b f(\mathbf{u}(t)) \left\| \frac{d\,\mathbf{u}}{dt}(t) \right\| dt$$

を満たす．

証明．定理 2 の証明において $\left\| \dfrac{d\,\mathbf{u}}{dt}(\xi_i) \right\|$ を $f(\mathbf{u}(\xi_i')) \left\| \dfrac{d\,\mathbf{u}}{dt}(\xi_i) \right\|$ に置き換えれば，全く同様に証明される．

□

注 5 定理 *2* より，定理 *3* において f が恒等的に 1 という定数関数のとき曲線の長さを得る：$\displaystyle\int_C ds = L(C)$.
◇

1.2.4 線積分の一般化．

曲線の長さの拡張としては §1.2.3 の積分が自然[10]だが，1 次元積分，という観点だけならば，‘ds’ を「成分」に分けて 2 種類の積分を考えることができる [2, §41]．これはベクトル場の積分 §1.2.5 に引き継がれる．

C は $\mathbf{u} = (x,y)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ で定義される曲線，$f\colon C \to \mathbb{R}$ は連続関数とする．

分割 $\Delta = \{t_i\}$ と $t_{i-1} < \xi_i < t_i$, $i = 1, \cdots, n$, に対して

$$S_{\Delta,\xi} = \sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i), y(\xi_i))(x(t_i) - x(t_{i-1})) \tag{9}$$

[10]見た目が似ているという形式美だけでなく，座標の回転で不変という幾何学的な意味での自然さも含意しているが，ここでは立ち入らない．

とおき，分割の幅 $|\Delta| \to 0$ としたときの極限値 $S = \lim_{|\Delta|\to 0} S_{\Delta,\xi}$ がもしあれば，それを $S = \int_C f(x,y)dx$ と書く．$S = \int_C f(x,y)dy$ についても同様に定義する．

$S_{\Delta,\xi}$ の定義から，C のうち y 軸に平行な部分からの積分 $S = \int_C f(x,y)dx$ への寄与は 0 であり，C のうち x 軸に平行な部分からの積分 $S = \int_C f(x,y)dy$ への寄与も 0 である．

定理 4 f が連続関数で C が区分的に $1:1$ で滑らかな曲線ならば，$\int_C f(x,y)dx$, $\int_C f(x,y)dy$ は存在し，向きを保つ曲線のパラメータ表示 $\mathbf{u} = (x,y)\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *(ただし，区分的に $1:1$ で滑らか)* の選び方によらず，

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f(x(t),y(t))\frac{d\,x}{dt}(t)\,dt$$

および

$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f(x(t),y(t))\frac{d\,y}{dt}(t)\,dt$$

を満たす．右辺は通常の実数上の実関数の積分.

ここで向きを保つ表示とは $\mathbf{u}(a)$ *($\mathbf{u}(b)$)* を固定する，という意味である.（同じ曲線上で始点が $\mathbf{u}(b)$ になるパラメータ表示では積分の符号が逆転する.）

証明. 定理 3 と同様である．唯一の違いは，ノルムで定義されていたところが差になっている（従って，向きが問題になる）点だけである. □

注 6 ここでの向きを保つという言葉の定義は閉曲線の場合には意味がなくなる．一般的に通用する定義は §1.4.1 を参照. ◇

1.2.5 ベクトル場の線積分．

積分は「横かける高さ，の和」の拡張だから，積と和が定義される毎に積分が定義される可能性がある．§1.2.4 の線積分を，ベクトル場 $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ の線積分に素直に適用すると，$\int_C f_1(x,y)\,dx$, $\int_C f_1(x,y)\,dy$, $\int_C f_2(x,y)\,dx$, $\int_C f_2(x,y)\,dy$, の 4 通りが考えられる．このうち 2 通りの線型結合は良い性質を持っていて，この講義で重要である[11]．ここでは先ずそのうちの 1 つ (接線成分に基づく積分) を定義する．

C を $\mathbf{u}\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}^2$ で定義される曲線，ベクトル場 $\mathbf{V} = (V_1, V_2)\colon\ C \to \mathbb{R}^2$ を連続関数とするとき，

$$\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u} = \int_C V_1(x,y)dx + \int_C V_2(x,y)dy$$

と書く (接線成分の線積分).

定理 5 ベクトル場 $\mathbf{V}$ が連続関数で C が区分的に $1:1$ で滑らかな曲線ならば，線積分 $\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}$ は存在し，向きを保つ曲線のパラメータ表示 $\mathbf{u}\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *(ただし，区分的に $1:1$ で滑らか)* の選び方によらず，

$$\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u} = \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{u}(t)) \cdot \frac{d\,\mathbf{u}}{dt}(t)\,dt$$

を満たす．右辺は通常の実数上の実関数の積分.

証明. 定理 4 の積分を 2 つ加えただけである. □

[11]一般にはこれらの積分は座標の回転で形を変えるが，2 つだけ回転で不変な表示を持っている，という意味で幾何学的な重要性がある．結果として，これらの組み合わせについては領域の境界での線積分が領域における重積分に等しくなる．以下，2 次元における講義は全てこの 2 つの組み合わせを巡る話である.

系 6 定理 *5* と同じ仮定の下で，

$$\left|\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}\right| \leqq \int_C \|\mathbf{V}(\mathbf{u})\|\, ds(\mathbf{u}).$$

証明. ベクトル場の線積分とスカラー場の線積分の定義において三角不等式 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leqq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$ を適用すればよい． □

問 7 以下のベクトル場 $\mathbf{V}$ と曲線 C について，

(1) 線積分 $\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}$ を計算せよ．
(2) 系 *6* を確かめよ．
(3) 同じ関数の線積分で積分経路 *(*曲線*)* の端点が同じでも，途中の経路で積分値が異なる場合と途中の経路に（この例の範囲で）よらない場合があることを確認せよ．

(1) $\mathbf{V}(x,y) = (x,0)$，C: $(0,0)$ から $(1,0)$ への線分と $(1,0)$ から $(1,1)$ への線分をつないだもの．
(2) $\mathbf{V}(x,y) = (x,0)$，C: $(0,0)$ から $(0,1)$ への線分と $(0,1)$ から $(1,1)$ への線分をつないだもの．
(3) $\mathbf{V}(x,y) = (y,0)$，C: $(0,0)$ から $(1,0)$ への線分と $(1,0)$ から $(1,1)$ への線分をつないだもの．
(4) $\mathbf{V}(x,y) = (y,0)$，C: $(0,0)$ から $(0,1)$ への線分と $(0,1)$ から $(1,1)$ への線分をつないだもの．
(5) $\mathbf{V}(x,y) = (y,x)$, C: $(1,0)$ と $(0,0)$ を結ぶ線分．
(6) $\mathbf{V}(x,y) = (y,x)$, C: $(x(t),y(t)) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$, $0 \leqq t \leqq T$.（$T > 0$.）
(7) $\mathbf{V}(x,y) = (y,-x)$, C: $(1,0)$ と $(0,0)$ を結ぶ線分．
(8) $\mathbf{V}(x,y) = (y,-x)$, C: $(x(t),y(t)) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$, $0 \leqq t \leqq T$.（$T > 0$.）
(9) $\mathbf{V}(x,y) = (x,y)$, C: 円 $x^2+y^2=1$，反時計回り一周．
(10) $\mathbf{V}(x,y) = (y,x)$, C: 円 $x^2+y^2=1$，反時計回り一周．
(11) $\mathbf{V}(x,y) = (-y,x)$, C: 円 $x^2+y^2=1$，反時計回り一周．

◇

線積分に関する基本的な評価について以下が知られている．以下を証明抜きで認める [2, §56][12]．

命題 7 ベクトル場 $\mathbf{V}$ の線積分に関して以下が成り立つ.（スカラー場の線積分に関しても同様の事実が成り立つ.）

(1) ある $M > 0$ があって，連続関数 $\mathbf{V}$ が，曲線 C 上常に $\|\mathbf{V}(\mathbf{u})\| \leqq M$ ならば C の長さを L とするとき，$\left|\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}\right| \leqq ML$.
(2) 連続関数の列 $\{\mathbf{V}_n\}$ が曲線 C 上で連続関数 $\mathbf{V}$ に一様収束しているとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_C \mathbf{V}_n(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u} = \int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}.$$

（この性質を，積分と極限の順序交換，または，項別積分可能性，などという
(3) C の分割 $\Delta = \{\mathbf{u}_i \mid i = 1,\cdots,n\}$ を順に結ぶ折線 Γ について，任意の $\epsilon > 0$ に対して $|\Delta|$ が十分小さければ $\left|\int_\Gamma \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u} - \int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}\right| < \epsilon$.（曲線上の線積分の折線上の積分による近似[13]．証明で，連続な関数は有界閉区間で一様連続であるであることを使う.）

◇

[12]難しいわけではないが，既修事項の範囲なので文献で補充していただきたい．
[13]線積分の定義は，折線上でさらに長方形の面積で近似している．

1.3 grad とポテンシャル.

問 7 で見たように，ベクトル場の線積分は，積分路の端点だけではなく，積分の途中の経路にもよる場合がある．しかし，途中の経路によらない場合は明らかに積分が非常に容易である．そこで，線積分が途中の経路によらない（端点だけで決まる）ようなベクトル場の鍵になる概念（勾配ベクトル場）を導入する．

1.3.1 テーラーの定理と grad (勾配ベクトル場).

2 変数実数値関数 $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が C^1 級（1 階偏微分可能で偏導関数 $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ が 2 つとも連続関数）のとき，テーラーの定理 (定理 34) と連続関数の定義から，

$$f(x+ta, y+tb) = f(x,y) + t(f_x(x,y)\,a + f_y(x,y)\,b) + o(t). \tag{10}$$

ここで，$o(\cdot)$ は $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{o(t)}{t} = 0$ となることを表す[14]．言い換えると，f の値の，場所による違い（差 $f(x+th, y+tk) - f(x,y)$）は t が十分小さいとき，t の一次式

$$t(f_x(x,y)\,a + f_y(x,y)\,b)$$

に近い，ということである．

そこで，関数 $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が与えられたとき[15]，それに付随して決まるベクトル場 $\operatorname{grad} f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$(\operatorname{grad} f)(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right),\quad (x,y) \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

によって定義する．

逆に，

$$\mathbf{V}(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

という形に書ける（そういう C^2 級関数 f が存在する）ベクトル場を勾配ベクトル場と言い，そのときの f を $\mathbf{V}$ のポテンシャルという．

注 8 あとの都合 *(*ポテンシャルの存在条件を $\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0$ で書くこと*)* のために，f は C^2 級という，少し強い滑らかさを要求することにする． ◇

このときテーラーの定理 (10) は

$$f(x+ta, y+tb) = f(x,y) + t(a,b)\cdot(\operatorname{grad} f)(x,y) + o(t) \tag{12}$$

となる．

t を動かせばよいから，$\|(a,b)\| = 1$ (即ち，(a,b) が単位ベクトル) としてよい．このとき位置の変化 (t) の 1 次までで，

$$f(x+ta, y+tb) - f(x,y) \approx t(a,b)\cdot(\operatorname{grad} f)(x,y) = t\,\|(\operatorname{grad} f)(x,y)\|\cos\theta(a,b) \tag{13}$$

で近似される．ここで $\theta(a,b)$ はベクトル (a,b) とベクトル $(\operatorname{grad} f)(x,y)$ のなす角．

(13) の右辺 (1 次近似) が最大になるのは $\theta(a,b) = 0$ のとき，即ち，$(a,b) = \dfrac{1}{\|(\operatorname{grad} f)(x,y)\|}(\operatorname{grad} f)(x,y)$ のとき．よって，ベクトル $(\operatorname{grad} f)(x,y)$ の方向は，f の値の変化の 1 次近似がもっとも大きい方向であり，f の値が大きくなる向きで，そのときの 1 次近似の大きさが $t\,\|(\operatorname{grad} f)(x,y)\|$ で与えられる．

---

[14] 細かく言うと (ta, tb) が $(0,0)$ のある近傍のとき成り立つ，というのがテーラーの定理だが，以後，この種の既修の注釈を原則として省略する．

[15] きちんと言えば， C^1 級関数が与えられたとき，だが，以後この種の注釈を原則として省略し，**関数やベクトル場は，断らなければ必要な回数だけ微分可能でその導関数は連続である**とすることが多い．

1.3.2 $\mathrm{grad}\, f$ の線積分とポテンシャル．

勾配ベクトル場のポテンシャルは線積分で表される．

命題 8 $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域，$f\colon\ D \to \mathbb{R}$ をその上の C^1 級関数，C を区分的に $1:1$ で滑らかな曲線で，そのパラメータ表示を $\mathbf{u}\colon\ [a,b] \to D$ とすると，

$$\int_a^b (\mathrm{grad}\, f)(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u} = f(\mathbf{u}(b)) - f(\mathbf{u}(a)).$$

証明．定理 5 と合成関数の微分法則 (定理 35) および微積分学の基本公式 (命題 42) から，

$$\int_C \mathrm{grad}\, f(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u} = \int_a^b \mathrm{grad}\, f(\mathbf{u}(t)) \cdot \frac{d\,\mathbf{u}}{dt}(t)\, dt = \int_a^b \frac{d\, f(\mathbf{u}(t))}{dt}\, dt = f(\mathbf{u}(b)) - f(\mathbf{u}(a)).$$

□

系 9 $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域，$\mathbf{V}\colon\ D \to \mathbb{R}^2$ をその上の勾配ベクトル場とする．このとき，D 内の区分的に $1:1$ で滑らかな曲線 C に沿った線積分 $\displaystyle\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u}$ は C の端点 $\mathbf{u}(a)$, $\mathbf{u}(b)$ のみで決まり， C の途中の経路によらない．

証明．$\mathbf{V}$ が勾配ベクトル場であるということは，ある f があって $\mathbf{V} = \mathrm{grad}\, f$ と書けるということであったから命題 8 からただちに従う． □

問 9 *(1)* $\mathbf{V}(x,y) = (y,x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}$, は勾配ベクトル場であることを示せ．
(2) $\mathbf{V}(x,y) = (-y,x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}$, は勾配ベクトル場でないことを示せ．

◇

定理 10 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義されたベクトル場 $\mathbf{V}$ に対して次の 2 条件は同値である．

(1) $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ は勾配ベクトル場である．即ち，あるスカラー場 f があって，$\mathbf{V} = \mathrm{grad}\, f$ が成り立つ．

(2) D 内の任意の区分的に $1:1$ で滑らかな曲線 C に沿った線積分 $\displaystyle\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u}$ は端点 $\mathbf{u}(a)$, $\mathbf{u}(b)$ のみによって，C の途中の経路によらない．

証明．上から下は 系 9 で示した．下から上を示す．$P_0 \in D$ を任意に固定する．仮定から， P_0 から $P \in D$ への任意の曲線を $C(P)$ とすると $f(P) = \displaystyle\int_{C(P)} \mathbf{V}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u}$ は P だけで決まり， $C(P)$ の途中の経路によらない．即ち $f\colon\ D \to \mathbb{R}$ は関数 (スカラー場) である．あとは $(\mathrm{grad}\, f)(P) = \mathbf{V}(P)$, $P \in D$, を示せばよい．

$P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ とする．$C(P)$ のパラメータ表示を $\mathbf{u}\colon\ [0,1] \to D$ ($\mathbf{u}(0) = P_0$, $\mathbf{u}(1) = P$) とし，$\epsilon > 0$ に対して $\mathbf{u}_\epsilon(t) = \begin{cases} \mathbf{u}(t), & 0 \leqq t \leqq 1, \\ (x+t-1, y), & 1 \leqq t \leqq 1+\epsilon, \end{cases}$ とおくと，$\mathbf{u}_\epsilon$ は P_0 と $P + (\epsilon, 0)$ を結ぶ曲線である．

f の定義から

$$f(x+\epsilon, y) = \int_0^{1+\epsilon} \mathbf{V}(\mathbf{u}_\epsilon(t)) \cdot \frac{d\,\mathbf{u}_\epsilon}{dt}(t)\, dt, \quad \epsilon > 0\,.$$

よって

$$f(x+\epsilon, y) - f(x,y) = \int_1^{1+\epsilon} \mathbf{V}(x+t-1, y) \cdot (1,0)\, dt = \int_1^{1+\epsilon} V_1(x+t-1, y)\, dt.$$

よって，積分関数の微分公式 (定理 43) から，f は x 偏微分可能で $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P) = V_1(P)$. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P) = V_2(P)$ も同様である．

□

注 10 この証明は領域に穴が開いていても *(*単連結でなくても*)* 成り立つ．*cf.* 定理 *15.* ◇

1.4 rot と Green の定理．

定理 10 の下の条件を実際に検証するのは難しいので，これを $\mathbf{V}$ が勾配ベクトル場であること確かめる具体的手段には利用しづらい．あるベクトル場が勾配ベクトル場であるかどうかを調べる実証可能な手段と，ベクトル場の回転 (rot) の関係を述べる．

1.4.1 接ベクトルと法ベクトル．

C を区分的に $1:1$ で滑らかな曲線， $\mathbf{u}$ をそのパラメータ表示 (で区分的に $1:1$ で滑らかなもの) とするベクトル $\mathbf{v}$ が $P=\mathbf{u}(t_0)$ での C の接ベクトル (tangent vector) であるとは， $\mathbf{v}=c\dfrac{d\,\mathbf{u}}{dt}(t_0)$ なる実数 $c\neq 0$ が存在することをいう．ベクトル $\mathbf{v}\neq 0$ が法ベクトル (normal vector) であるとは， $\mathbf{v}\cdot\dfrac{d\,\mathbf{u}}{dt}(t_0)=0$ を満たすことをいう．接ベクトルは C の接線の方向を，法ベクトルはそれに直交する直線の方向を表す．長さ 1 の接ベクトルを単位接ベクトル，長さ 1 の法ベクトルを単位法ベクトル，という．単位接ベクトル $\mathbf{t}$ は曲線のパラメータ表示 $\mathbf{u}$ の微分 $\mathbf{u}'$ (即ち，接ベクトル) を用いて

$$\mathbf{t}=\frac{1}{\|\mathbf{u}'\|}\mathbf{u}' \tag{14}$$

によって得られる．

曲線 C の 2 つの (滑らかな) パラメータ $\mathbf{u},\mathbf{v}$ が曲線 C の同じ向きを定めるとは， $\mathbf{u}(s)=\mathbf{v}(t)$ なる任意の s,t に対して， $\dfrac{d\,\mathbf{u}}{dt}(s)=c\dfrac{d\,\mathbf{v}}{dt}(t)$ なる正の数 $c>0$ がとれることをいう．異なる向きを定めるとは，この式において $c<0$ となることをいう．

曲線 C の 2 つの区分的に $1:1$ で滑らかなパラメータ表示 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ は同じ向きを定めるか異なる向きを定めるかいずれかである．もし $\mathbf{u}(a)=\mathbf{v}(a)\neq\mathbf{u}(b)=\mathbf{v}(b)$ ならば同じ向きを定め，もし $\mathbf{u}(a)=\mathbf{v}(b)\neq\mathbf{u}(b)=\mathbf{v}(a)$ ならば異なる向きを定める．どちらか一方の向きのパラメータ表示のみを考えるとき，向きのついた (oriented) 曲線という．(即ち，同じ向きを定めるという同値関係の同値類を曲線の向きと言い，一方の同値類のパラメータを向きを保つパラメータという.）単位接ベクトルは曲線の向きを決めれば一意的に定まる．

曲線の滑らかなパラメータ表示 $\mathbf{u}$ が与えられたとき，標準の向きの法ベクトルは接ベクトル $(v_1,v_2)=\dfrac{d\,\mathbf{u}}{dt}$ から時計回りに 90 度回した方向，即ち $(v_2,-v_1)$ とする．即ち，標準の向きの単位法ベクトル $\mathbf{n}$ は曲線のパラメータ表示 $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ の微分 $\mathbf{u}'$ を用いて

$$\mathbf{n}=\frac{1}{\|\mathbf{u}'\|}(u_2',\,-u_1') \tag{15}$$

で与えられる．

問 11 次の曲線の接ベクトルと法ベクトルを求めよ．(ヒント．先ず，パラメータ表示を求めよ．そうすればあとは殆ど微分するだけ.）

(1) 楕円 $C=\left\{(x,y)\mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\right\}$.
(2) 放物線 $C=\left\{(x,y)\mid y=ax^2\right\}$.
(3) 双曲線 $C=\left\{(x,y)\mid \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\right\}$.

◇

単位接ベクトルを用いれば定理 5 の線積分は §1.2.3 のスカラー場の線積分を用いて書くことができる．

系 11 ベクトル場 $\mathbf{V}$ が連続関数で C が $1:1$ で区分的に滑らかな曲線ならば，線積分 $\displaystyle\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}$ は存在し，向きを保つ曲線のパラメータ表示 $\mathbf{u}\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}^2$ *(ただし，*$1:1$ *で区分的に滑らか)* の選び方によらず，§1.2.3 のスカラー場の線積分を用いて

$$\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}=\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{t}(t)\,ds(\mathbf{u})$$

と書くことができる．ここで $\mathbf{t}$ は $\mathbf{u}$ の向きの C の単位接ベクトル．

証明. 定理 5 の主張に (14) を代入して定理 3 と見比べれば明らか. $\mathbf{t}(t)$ は見かけ上, t の関数で $\mathbf{u}$ の関数 (スカラー場) になっていないが, C が $1:1$（区分的に, ではなく, 厳格に）ならば, $\mathbf{u}$ の関数と見なせることは言うまでもない. □

注 12 もちろん, 厳格に $1:1$ でなくても, $1:1$ であるような曲線の有限和で書けるときはやはり結果が成り立つ. ◇

1.4.2 領域の境界.

§1.2.1 の続きで, 曲線について, 領域の境界という観点から追加する.

次の事実を証明抜きで認める[16].

定理 12 (Jordan の閉曲線定理) $\mathbb{R}^2$ の *Jordan* 閉曲線 *(*単純閉曲線*)* C に対して, 補集合 C^c は 2 つの連結成分からなる. ◇

有界な連結成分を C の内部, 非有界な成分を外部という. 以後, この講義では内部と外部についてこれ以上こだわらず, 図形による直感を信じることにする.

$D \subset \mathbb{R}^2$ が (区分的に) 滑らかな境界を持つ領域であるとは, D が連結開集合であって, 境界 ∂D が (区分的に) 滑らかな (無限長かもしれない) 曲線の和集合であることをいう. 和集合と書いたのは, 2 次元ドーナツの境界は 2 つの円からなることを念頭に置いている. 特に D が有界ならば, その ∂D は閉曲線の有限和 (互いに交わらない有限個の和集合) である.

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ が単連結であるとは, D 内の任意の Jordan 閉曲線 C (§1.2.1) の内部が (内部の全ての点が) D に含まれるときをいう (§A.5) ことにする[17].

曲線のパラメータ表示は向きを持ち (§1.4.1), 線積分は向きによって符号が反対になる. 以下で集合 D の境界 ∂D に沿った線積分を考えるが, 標準的な向きを決めておいて,「∂D に沿った線積分」と言っただけで符号が決まるようにしたほうが便利である. ∂D が Jordan 閉曲線の場合 (例えば定理 52 の状況), ∂D の曲線としての標準的な向きを D を左手に見る向きと定義する. 言い換えれば, 境界の標準的な向きを時計回りに 90 度回したとき領域の外に向かう方向になるように決め, これを法線ベクトルの標準的な向きとする.

2 次元ドーナツ領域の外側の境界円の標準的な向きは反時計回り, 内側の境界円の標準的な向きは時計回りである.

1.4.3 Green の公式.

重積分の議論 (§A.3.2) によって領域での重積分は (適当な条件の下で) 逐次積分で表せる. 定理 47 より, 1 つ目の積分を済ませた後の積分は領域の境界に関する線積分になる. これを裏返せば, 線積分は重積分で書けることになる.

定理 13 $D \subset \mathbb{R}^2$ が区分的に $1:1$ かつ滑らかな境界を持つ領域で, $f:\ D \to \mathbb{R}$ が C^1 級関数ならば,

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dxdy = -\int_{\partial D} f(x,y)\,dx,$$

および

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dxdy = \int_{\partial D} f(x,y)\,dy,$$

が成り立つ. 右辺の線積分の定義は §1.2.4 の通りとし, また, 領域の境界に関する積分路は §1.4.2 で定義した標準的な向きとする.

[16] 恐らく未習だが, 立ち入るとベクトル解析に戻ってこれないから.

[17] プロがもっと一般の集合や空間を対象に研究するときは, 単連結の定義は違う. (つまり, 曲線で内部と外部が分かれるという事実は $\mathbb{R}^2$ の Jordan 閉曲線でないとなかなか言えないことなのだろう.) しかし, $\mathbb{R}^2$ の領域で積分路として Jordan 曲線しか扱わない場合には, この定義で同値になる. この講義ではそういう場合だけで満足する.

注 13 この講義では領域の形が都合のいい場合だけを証明する．即ち，D が $a \leqq b$ と $\phi_1(x) \leqq \phi_2(x)$, $a \leqq x \leqq b$, を満たす $a, b \in \mathbb{R}$ と $\phi_i\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, を用いて

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi_1(x) \leqq y \leqq \phi_2(x),\ a \leqq x \leqq b\} \tag{16}$$

と書け，また x と y を取り替えても同様の表記が成り立つ，即ち，$c \leqq d$ と $\psi_1(y) \leqq \psi_2(y)$, $c \leqq y \leqq d$, を満たす $c, d \in \mathbb{R}$ と $\psi_i\colon\ [c,d] \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, を用いて

$$D = \{(y,x) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y),\ c \leqq y \leqq d\} \tag{17}$$

と書けることを仮定する．D が凸領域ならば十分である．従って， D が矩形や円の場合は問題ない．

一般の場合は D を縦横に分割して，上記が成り立つようにしておけばよいはずだが，ここでは証明せずに事実として認める（*[2, §102]* を参照）．(分割したときに新たに生じる線分からの線積分への寄与は，隣接する領域の対応する線積分で大きさが一致して法ベクトルの方向だけ逆になるので，打ち消し合う.) ◇

証明. D が (16), (17) の形に書けているとする．このとき，∂D の標準的な向きのパラメータ表示 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)\colon\ [0,4] \to \partial D$ として，

$$u_1(t) = \begin{cases} a + (b-a)t, & 0 \leqq t < 1, \\ b, & 1 \leqq t < 2, \\ b + (a-b)(t-2), & 2 \leqq t < 3, \\ a, & 3 \leqq t \leqq 4, \end{cases}$$
$$u_2(t) = \begin{cases} \phi_1(a + (b-a)t), & 0 \leqq t < 1, \\ \phi_1(b) + (\phi_2(b) - \phi_1(b))(t-1), & 1 \leqq t < 2, \\ \phi_2(b + (a-b)(t-2)), & 2 \leqq t < 3, \\ \phi_2(a) + (\phi_1(a) - \phi_2(a))(t-3), & 3 \leqq t \leqq 4, \end{cases}$$

をとることができる．

$f\colon\ D \to \mathbb{R}$ が C^1 級なので定理 47 より

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dxdy = \int_a^b f(x, \phi_2(x))\,dx - \int_a^b f(x, \phi_1(x))\,dx.$$

一方，上記パラメータ表示から，

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} f(x,y)\,dx = \int_0^4 f(\mathbf{u}(t))\,\frac{d\,u_1}{dt}(t)\,dt \\
&= (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t, \phi_1(a+(b-a)t))\,dt + (a-b)\int_2^3 f(b+(a-b)(t-2), \phi_2(b+(a-b)t))\,dt \\
&= \int_a^b f(x, \phi_1(x))\,dx + \int_b^a f(x, \phi_2(x))\,dx. = -\int_a^b f(x, \phi_2(x))\,dx + \int_a^b f(x, \phi_1(x))\,dx.
\end{aligned}$$

最後の変形では 1 変数関数の普通の積分の変数変換の公式を用いた．

よって，

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dxdy = -\int_{\partial D} f(x,y)\,dx$$

を得る．

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dxdy = \int_{\partial D} f(x,y)\,dy$$

についても全く同様である．但し，標準的な向きを D の内部を左手に見る向き，と定めたので，定理 47 を $\int_{\partial D} \cdot dy$ に書き直すときの符号が 2 つの公式で逆になる．

□

1.4.4 rot（ベクトル場の発散）と planimeter．

§1.2.5 で定義したベクトル場の接線成分の線積分に定理 13 を適用すると，ベクトル場 $\mathbf{V} = (V_1, V_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ と領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対して次の公式を得る．

$$\int_{\partial D} \mathbf{V}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u} = \int_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y) \right) dxdy \tag{18}$$

そこで，(平面) ベクトル場 $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ に対して，その回転 (rotation) $\mathrm{rot}\,\mathbf{V}:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \tag{19}$$

で定義する．すると (18) は次のように書ける．

定理 14 $D \subset \mathbb{R}^2$ が区分的に 1 : 1 かつ滑らかな境界を持つ領域で，ベクトル場 $\mathbf{V}:\ \overline{D} \to \mathbb{R}^2$ が C^1 級とする．このとき，

$$\int_D \mathrm{rot}\,\mathbf{V}(x,y)\,dxdy = \int_{\partial D} \mathbf{V}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u}.$$

領域の境界に関する積分路は §1.4.2 で定義した標準的な向きとする．

注 14 グリーンの公式の内容は微分積分学としては 定理 *13* で尽きているが，グリーンの公式と呼ぶときは定理 *14* の形に書いておくことが多いようである[18]． ◇

問 15 *(1)* $\mathbf{V}(x,y) = \frac{1}{2}(-y, x)$ のとき $\mathrm{rot}\,\mathbf{V}$ を計算せよ．
(2) $\mathbf{V}$ が *(*C^1 級の*)* 勾配ベクトル場のとき $\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = 0$ となることを証明せよ．

◇

定理 14 を $V_1(x,y) = -\dfrac{1}{2}y$, $V_2(x,y) = \dfrac{1}{2}x$, で定義されるベクトル場 $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ に対して適用すると，$\mathrm{rot}\,\mathbf{V}(x,y) = 1$ となるから，

$$\int_D dxdy = \frac{1}{2}\int_{\partial D} (-y\,dx + x\,dy) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - \frac{1}{2}\int_{\partial D} y\,dx \tag{20}$$

を得る．重積分の定義 §A.3.2 から直ちに分かるように $\displaystyle\int_D dxdy$ は D の面積 $S(D)$ である．但し，ここでの D の面積とは，重積分の定義から，D を覆う小矩形群の面積の総和の (矩形を一様に小さくしたときの) 極限である．(定理 14 の仮定の下で，そのような極限の存在が保証されている (§A.3.2).)

特別な場合として，閉曲線 C が領域を何も囲まない場合，即ち同じ曲線上を行ったり戻ったりして何も囲まずに戻った場合，(20) に至った議論を繰り返すと

$$\frac{1}{2}\int_C x\,dy - \frac{1}{2}\int_C y\,dx = 0 \tag{21}$$

を得る．

問 16 *(1)* 原点中心半径 1 の円を $(1,0)$ から反時計回りに 1 周する閉曲線について *(20)* の右辺を計算することで *(20)* を確かめよ．
(2) 原点中心半径 1 の円の上半分を $(1,0)$ から $(-1,0)$ まで進んで $(1,0)$ に戻る区分的に 1 : 1 滑らかな閉曲線について *(21)* を確かめよ．

◇

---

[18]定理 14 で $V_2 = 0$ などとすれば定理 13 に戻るので，基本的にどちらで覚えてもいいはずだが，座標系の回転に関して不変な形という理由によるのであろう．
もちろん，回転不変な状況から出発しても回転不変性を保たない変数変換を行えば座標の回転に関して不変であることが重要でない状況が生じる．そういうときは， 定理 13 に戻ればよい．最初から回転不変性が重要でない問題も当然ある．
本講義の種々の公式は，多変数関数の微積分学の一部に過ぎないが，座標系の回転に関して不変な問題に興味がある場合には，本講義の選んだ公式が見通しが良い，という意味である．

公式 (20), (21) を利用して，平面上に描かれた図形の縁をなぞるだけでその面積を測れる器具が作れる（planimeter，Amsler の面積計 [2, §41]）.

お互いに相手の外部にある 2 つの区分的に滑らかな Jordan(1 : 1) 閉曲線 C, C_0 と正数 $\ell > 0$ を固定する．長さ ℓ の線分の両端 $A = (x, y)$, $A_0 = (x_0, y_0)$ が，それぞれ C, C_0 の上を動くとする．Planimeter は単位長さの棒 OA_0 と長さ ℓ の棒 A_0A を A_0 でちょうつがいでつないであり， A_0A 上 A_0 から長さ $k < \ell$ のところに A_0A を軸として回転する車輪 K から構成される.

線分 A_0A と x 軸のなす角を θ とすると,

$$x = x_0 + \ell\cos\theta, \quad y = y_0 + \ell\sin\theta. \tag{22}$$

A と A_0 の動きは $\theta(s)$, $x_0(s)$, $y_0(s)$, $s \in [0, 1]$, によってパラメータ表示される.

ここで，s が 0 から 1 まで動くとき，A は C 上を 1 周するが， A_0 は C_0 上を (区分的に 1 : 1 滑らかに) 行ったり来たりするが 1 周はしない，とする．すると，(20), (21) から C が囲む領域の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2}\int_0^1 (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\,ds, \quad \int_0^1 (x_0(s)y_0'(s) - y_0(s)x_0'(s))\,ds = 0\,.$$

(22) を代入して整理すると,

$$S = \frac{\ell^2}{2}\int_0^1 \theta'(s)\,ds + \frac{\ell}{2}\int_0^1 (x_0(s)\cos\theta(s) + y_0(s)\sin\theta(s))\theta'(s)\,ds + \frac{\ell}{2}\int_0^1 (\cos\theta(s)\,y_0'(s) - \sin\theta(s)\,x_0'(s))\,ds.$$

部分積分すれば,

$$\begin{aligned}&\frac{\ell}{2}\int_0^1 (x_0(s)\cos\theta(s) + y_0(s)\sin\theta(s))\theta'(s)\,ds\\ &= (x_0(s)\sin\theta(s) - y_0(s)\cos\theta(s))|_0^1 - \frac{\ell}{2}\int_0^1 (x_0'(s)\sin\theta(s) - y_0'(s)\cos\theta(s))\,ds.\end{aligned}$$

C と C' は互いに相手の外部にあるので，線分 A_0A は回転しない： $\theta(0) = \theta(1)$ ．よって,

$$S = \ell\int_0^1 (\cos\theta(s)\,y_0'(s) - \sin\theta(s)\,x_0'(s))\,ds.$$

一方， A_0A についている車輪 K の位置は $\mathbf{K}(s) = (x_0(s) + k\cos\theta(s), y_0(s) + k\sin\theta(s))$ である．車輪は A_0A を車軸として平面上を滑らないように転がる．A_0A を軸として滑らないように回転するということは，回転量 R が線積分

$$R = \int_0^1 (-\sin\theta(s), \cos\theta(s)) \cdot d\mathbf{K}(s)$$

で表される，という意味である．即ち,

$$R = \int_0^1 (y_0'(s)\cos\theta(s) - x_0'(s)\sin\theta(s) + k\theta'(s))\,ds \int_0^1 (y_0'(s)\cos\theta(s) - x_0'(s)\sin\theta(s))\,ds = S/\ell$$

を得る．ここで $\theta(0) = \theta(1)$ を再び用いた.

これによって，車輪の回転量をめもっておけば，planimeter によって閉曲線 C をなぞることで C が囲む領域の面積 S を求めることができる.

1.4.5 ベクトル場がポテンシャルを持つ条件.

定理 14 を用いれば，ベクトル場が勾配ベクトル場である (ポテンシャルを持つ) 条件定理 10 を検証可能なものに書き換えることができる.

定理 15 単連結 *(§1.4.2)* 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ が区分的に 1 : 1 かつ滑らかな境界を持つ領域で，ベクトル場 $\mathbf{V}\colon \overline{D} \to \mathbb{R}^2$ が C^1 級とする．このとき次の条件は同値である.

(1) $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ は勾配ベクトル場である．即ち，あるスカラー場 f があって，$\mathbf{V} = \mathrm{grad}\, f$ が成り立つ.

(2) $\mathrm{rot}\,\mathbf{V}=\mathbf{0}$ が D 上恒等的に成り立つ．

注 17 単連結 *(*内部に穴がない*)* という仮定は本質的である． ◇

証明．上の条件から下の条件を得ることは実際に計算すれば分かる．そこで下の条件から上の条件を得ればよい．さらに適当に分割すれば凸領域で考えれば十分であろう．以下そう仮定する．

$\mathrm{rot}\,\mathbf{V}=\mathbf{0}$ が D 上恒等的に成り立つので定理 14 から D 内の任意の区分的に $1:1$ かつ滑らかな閉曲線 C に対して

$$\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}=0\,. \tag{23}$$

（このとき，内部に境界があると，そこから余分な線積分が生じるので，単連結という仮定は本質的である.）

定理 10 と (23) から $\mathbf{V}$ は勾配ベクトル場である．

□

定理 15 の下から上への証明で，D が単連結であるという仮定は本質的だった．そのことを具体的に見る．

例 18 $\mathbf{V}(x,y)=\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ で $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上で定義されるベクトル場 $\mathbf{V}$ は D 上 $\mathrm{rot}\,\mathbf{V}=0$ を満たすが，原点を中心とする単位円の 1 周積分は

$$\int_0^{2\pi}(-\sin\theta,\cos\theta)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta=2\pi$$

となり， 0 にはならない． ◇

定理 16 $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上で定義された C^1 級ベクトル場 $\mathbf{V}:\ D\to\mathbb{R}^2$ が D で $\mathrm{rot}\,\mathbf{V}=0$ を満たすとする．このとき，実数 Π が存在して次が成り立つ．

D に含まれる滑らかな単純閉曲線 C が $(0,0)$ を内部に含むとき，C によらずに，$\displaystyle\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}=\Pi$.（但し，標準の向きに積分する.）

さらに $\mathbf{V}=\mathrm{grad}\,f$ となる f が D 上存在することと $\Pi=0$ は同値である．

証明．一般的に成り立つ定理 10 と単連結な領域で成り立つ定理 15 に帰着させる証明を行う．

仮定を満たす単純閉曲線 C_1, C_2 をとり，それぞれの $(1:1$ 滑らかな$)$ パラメータ表示を $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ とする．$\epsilon>0$ を十分小さくとれば，$D_\epsilon=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leqq\epsilon\}$ が C_1, C_2 と交わらないようにできる．C_1, C_2 が囲む領域をそれぞれ D_1, D_2 とすると，ϵ のとりかたから $D_\epsilon\subset D_1$, $D_\epsilon\subset D_1$.

$g_\epsilon:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を，C^1 級関数で $g_\epsilon(P)=\begin{cases}1, & \|P\|\geqq\epsilon,\\ 0, & \|P\|<\dfrac{1}{2}\epsilon,\end{cases}$ を満たすようにとる（つまり $\dfrac{1}{2}\epsilon\leqq\|P\|\leqq\epsilon$ なる領域で滑らかに 0 から 1 まで内挿する）．すると， $g\,\mathbf{V}$ は，$(0,0)$ で 0 とおくことで，$(0,0)$ も含めて $\mathbb{R}^2$ で C^1 級関数になる．よって， 定理 10 を D_1, D_2 に適用することができる.（$(0,0)$ が境界にならない）.

作り方と仮定から $P\notin D_\epsilon$ のとき

$$\mathrm{rot}(g\,\mathbf{V})(P)=(\mathrm{rot}\,\mathbf{V})(P)=0\,.$$

また， C_1, C_2 上で $g=1$．よって， 定理 10 から

$$\int_{C_i}\mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}=\int_{C_i}g(\mathbf{u})\mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}=\int_{D_i}\mathrm{rot}(g\,\mathbf{V})(\mathbf{u})d\mathbf{u}=\int_{D_\epsilon}\mathrm{rot}(g\,\mathbf{V})(\mathbf{u})d\mathbf{u},\quad i=1,2.$$

即ち，問題の量は曲線によらない．

後半については， $\Pi=0$ ならば，$\displaystyle\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}$ が C の端点だけで決まり，途中の経路によらないから，定理 10 から (細かく言えば，定理 10 と同じ証明で) $\mathbf{V}=\mathrm{grad}\,f$ となる f の $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ での存在が分かる．また， $\mathbf{V}=\mathrm{grad}\,f$ となる f が存在すれば，$(0,0)$ を内部に含む単純閉曲線 C を 2 点 P, Q で切って 2 本の曲線 C_1 $(P\to Q)$, C_2 $(Q\to P)$ とするとき，

$$\int_{C_1}\mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}=f(Q)-f(P)=-\int_{C_2}\mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}$$

となるから

$$\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u} = 0\,.$$

□

1.5 div と Gauss の定理.

§1.4.4 では，一般的なグリーンの公式定理 13 から定理 14 という，§1.2.5 の (接線成分の) 線積分に即した組み合わせを選んだ．ここではもう 1 つの組み合わせ (法線成分の線積分) を取り上げる．

1.5.1 div（ベクトル場の発散）.

grad, rot と並んで (ベクトル解析にとって) 重要な第 3 の微分演算子として，ベクトル場 $\mathbf{V} = (V_1, V_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対して

$$(\operatorname{div} \mathbf{V})(x, y) = \frac{\partial V_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x, y)$$

で定義される演算子 div がある．得られたスカラー場 $\operatorname{div} \mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $\mathbf{V}$ の発散 (divergence) という．

問 19 次式で定義されるベクトル場の発散をそれぞれ計算せよ．

(1) $\mathbf{V}(x, y) = (-y, x)$
(2) $\mathbf{V}(x, y) = (x, y)$
(3) $\mathbf{V}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ *(*$(x, y) \neq (0, 0)$*)*
(4) $\mathbf{V}(x, y) = (x \log \sqrt{x^2 + y^2}, y \log \sqrt{x^2 + y^2})$ *(*$(x, y) \neq (0, 0)$*)*

◇

問 20 *(1)* f, g を C^1 級スカラー場， $\mathbf{V}$ を C^1 級ベクトル場，とするとき以下を証明せよ．
(a) $\operatorname{grad}(f\,g) = (\operatorname{grad} f)\,g + f\ \operatorname{grad} g$
(b) $\operatorname{div}(f\,\mathbf{V}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \mathbf{V} + f\ \operatorname{div} \mathbf{V}$
(c) $\operatorname{rot}(f\,\mathbf{V}) = (\operatorname{grad} f) \times \mathbf{V} + f\ \operatorname{rot} \mathbf{V}$
ここで， 2 次元ベクトル $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$, $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ に対して，$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = U_1 V_2 - U_2 V_1$ とおいた．
(2) f を C^2 級スカラー場， $\mathbf{V}$ を C^2 級ベクトル場，とするとき以下を証明せよ．
(a) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$
(b) $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
*(*右辺を Δf と書いて Δ を *(*2 次元*)* ラプラス作用素という．*)*

◇

1.5.2 Gauss の定理.

ベクトル場 $\mathbf{V}$ の曲線 C の法線成分 (§1.4.1) の線積分を接線成分の線積分 系 11 にならって定義する．

定理 17 C を $\mathbf{u} :\ [a, b] \to \mathbb{R}^2$ で定義される，1 : 1 で区分的に滑らかな曲線，$\mathbf{n}(\mathbf{u})$ を C の標準の向き *(*曲線の向きに対して時計回り 90 度方向*)* の単位法線ベクトル，ベクトル場 $\mathbf{V} = (V_1, V_2) :\ C \to \mathbb{R}^2$ を連続関数とするとき，向きを保つ 1 : 1 区分的に滑らかな C の表示によらずに，

$$\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(t)\, ds(\mathbf{u}) = \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{u}(t)) \cdot \mathbf{n}(t) \left\| \frac{d\,\mathbf{u}}{dt} \right\| dt$$

が *(*存在して等号が*)* 成り立つ．ここで，左辺は §1.2.3 のスカラー場の線積分，右辺は通常の 1 次元積分．

証明. 定理 3 から明らか.

n がスカラー場とみなせることは系 11 の証明と全く同様. □

注 21 系 *11* の注意と全く同様に，厳格に 1 : 1 曲線でなくても，1 : 1 曲線の有限和に分けられれば十分. ◇

問 22 問 *19* の各ベクトル場 $\mathbf{V}$ に対して，

(1) 原点を中心とする単位円
(2) $(\pm 1, \pm 1)$ を 4 頂点とする正方形

それぞれを C とするとき，$\displaystyle\int_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds$ を計算せよ. ◇

定理 14 に対応して次の公式が成り立つ.

定理 18 $D \subset \mathbb{R}^2$ が 1 : 1*(*または 1 : 1 であるような曲線の有限和に書ける*)* かつ区分的に滑らかな境界を持つ領域で，ベクトル場 $\mathbf{V}\colon\ \overline{D} \to \mathbb{R}^2$ が C^1 級とする．このとき，

$$\int_D \operatorname{div}\mathbf{V}(x,y)\,dxdy = \int_{\partial D} \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}(t)ds(\mathbf{u}).$$

領域の境界に関する積分路は §1.4.2 で定義した標準的な向き，$\mathbf{n}$ は標準的な向き *(*即ち領域から外向き*)* の単位法ベクトルとする.

証明. 与えられた $\mathbf{V}$ に対して，$(-V_2, V_1)$ なるベクトル場を考えて定理 14 を適用すると，計算によって $\operatorname{rot}(-V_2, V_1) = \operatorname{div}\mathbf{V}$ だから

$$\int_D \operatorname{div}\mathbf{V}(x,y)\,dxdy = \int_{\partial D} (-V_2, V_1)(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}.$$

系 11 と (14) と (15) より，右辺は

$$= \int_{\partial D} (-V_2, V_1)(\mathbf{u})\cdot\frac{1}{\|\mathbf{u}'\|}(u_1',\, u_2')(\mathbf{u})\,ds(\mathbf{u}) = \int_{\partial D} \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}(t)\,ds(\mathbf{u})$$

と変形される.

□

問 23 問 *22* の各ベクトル場と各積分路に関して *Gauss* の定理を確かめよ．但し， $(0,0)$ で定義されていないベクトル場については，原点の周りに小さな半径 ϵ の穴を開けた領域で *Gauss* の定理を確かめよ. ◇

1.6 座標変換.

偏微分演算子の特別な線型結合 grad, rot, div や線積分の特別な線型結合 $\displaystyle\int_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{t}ds$, $\displaystyle\int_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds$ がこの講義で特記されるのは，これらが座標の回転に関して不変だからである.

ここで，この講義で座標の回転というとき，空間座標の回転と同時に各点でのベクトル空間の成分表示 ($\mathbf{V}(P)$ の成分) の座標回転も共に行う．今までは，ベクトル空間 $\mathcal{V} = \{\mathbf{V}(P)\}$ の成分表示の座標を固定していたので，$\mathcal{V}$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視して何ら問題はなく，ベクトル場を 2 変数実関数 2 つ一組 $\mathbf{V} = (V_1, V_2)\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ として扱ってきた．微積分学をやるためには座標表示が必要だから，この扱いのほうが適当であった．しかし，座標変換を考えるときは，ベクトル空間 $\mathcal{V}$ とその成分表示 $\mathbb{R}^2$ を区別しないといけない (§A.4.1).

ベクトル場をより正しく定義すると，つぎのようになる.

> ベクトル場とは，平面から 2 次元ベクトル空間 $\mathcal{V}$ への関数 $\mathbf{V}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathcal{V}$ のことをいう.

スカラー場とは平面から 1 次元ベクトル空間への関数である．1 次元ベクトル空間に対しては座標回転は行わないと約束する．そうするとスカラー場は 2 変数実関数ということと変わらない．

今までベクトル場として扱ってきたものは，$\mathcal{V}$ に基底をとって，成分表示したもの $(\mathcal{V} \sim \mathbb{R}^2)$ であるから，座標回転で基底も取り替えると成分は変わる．従って，スカラー場とベクトル場の成分は座標変換での変換のしかたが違う．

一般に，ベクトル解析において座標変換というとき，空間座標の変換と同時に各点でのベクトル空間の基底も同じ変換を行うことをいう，と約束する[19]．極座標表示の具体例を §1.6.2 で示す．

1.6.1 座標の回転．

> $\mathbb{R}^2$ の点を座標表示するための座標を回転するときに，各点でのベクトルの成分表示の基底も同じ回転を行う．

平面ベクトル場 $\mathbf{V}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathcal{V}$ を表すのに，平面上に各点 (x, y) でのベクトル $\mathbf{V}(x, y)$ を，(x, y) を始点とするベクトルで表示することにしたが，座標回転を上記のように約束することは，ベクトル自体は変えない，即ち，この図示をそのまま保存することに相当する．（もし，例えば，各点でのベクトル空間の基底は回転しないことにすると，各点でのベクトルは成分を変えないから，古い座標系で x 軸を向いていたベクトルは第 1 成分しかないので，新しい座標系でも第 1 成分しかない．即ち新しい x' 軸の方向に矢印を向けることになり，矢印が動いてしまう．）

ベクトル場とは「平面上に描かれた矢印を表す」2 変数関数のことである，と約束したことに相当する．（気持ちとしては，当然この約束が先にあって，その結果としてくだんの座標回転の約束が導入された．）

$\theta \in \mathbb{R}$ に対して角度 θ の座標回転とは 2 変数関数

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(x', y') \\ y(x', y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

あるいは，逆に解いて，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(x, y) \\ y'(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定義される変数変換 $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (x', y') \in \mathbb{R}^2$ のことである[20]．

スカラー場とは，座標回転に対して値を変えない，(つまり，普通の) 実数値関数 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ のことをいう．元の座標系での関数 (スカラー場) を $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，新しい座標系での関数を $\tilde{f}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，と書くと，

$$\tilde{f}(x', y') = f(x(x', y'), y(x', y')), \quad (x', y') \in \mathbb{R}^2. \tag{24}$$

従って，合成関数の微分法則定理 36 から，C^1 級関数 $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x'}(x', y') &= \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x(x', y'), y(x', y')) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x(x', y'), y(x', y')), \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y'}(x', y') &= -\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x(x', y'), y(x', y')) + \cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x(x', y'), y(x', y')). \end{aligned} \tag{25}$$

（平たく言えば，左辺は $x = x(x', y')$, $y = y(x', y')$ を代入して x', y' の関数として微分すること，右辺は微分してから代入することを意味する．）これらを x, y 偏微分について解いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x(x', y'), y(x', y')) &= \cos\theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x'}(x', y') - \sin\theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y'}(x', y'), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x(x', y'), y(x', y')) &= \sin\theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x'}(x', y') + \cos\theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y'}(x', y'). \end{aligned} \tag{26}$$

[19]各点のベクトル空間の変換を点によって変えると，一般相対性理論における重力場の話になる．数学ではベクトル束の研究である．こういう話にはこの講義では一切踏み込まない（著者に踏み込むための準備のための時間は全くない）．

[20]符号の覚え方．θ が 90 度のとき $(x, y) = (0, 1) \mapsto (1, 0) = (x', y')$.

ベクトル場とは，平面 $\mathbb{R}^2$ から 2 次元内積ベクトル空間 $\mathcal{V}$ への関数 $\mathbf{V}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathcal{V}$ のことである．$\mathcal{V}$ の正規直交基底 $\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}$ をとって，各点 $P=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して，

$$\mathcal{V} \ni \mathbf{V}(P) = V_1(x,y)\mathbf{e_x} + V_2(x,y)\mathbf{e_y}$$

と置くことによって成分 $V_1\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $V_2\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を得る．

座標回転に対してベクトル場の値域のベクトル空間 $\mathcal{V}$ の基底も同じ回転をすると約束した．回転後の規格化された基底を e'_x, e'_y とすると，

$$e'_x\cdot e_x = \cos\theta,\quad e'_x\cdot e_y = \sin\theta,\quad e'_y\cdot e_x = -\sin\theta,\quad e'_y\cdot e_y = \cos\theta.$$

新しい座標系での成分表示を

$$\begin{aligned}&\tilde{V}_1(x',y')\mathbf{e'_x} + \tilde{V}_2(x',y')\mathbf{e'_y} = \tilde{\mathbf{V}}(x',y')\\ &= \mathbf{V}(x(x',y'),y(x',y')) = V_1(x(x',y'),y(x',y'))\mathbf{e_x} + V_2(x(x',y'),y(x',y'))\mathbf{e_y},\quad (x',y')\in\mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

で定義すると，

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1(x',y') &= \cos\theta\, V_1(x(x',y'),y(x',y')) + \sin\theta\, V_2(x(x',y'),y(x',y')),\\ \tilde{V}_2(x',y') &= -\sin\theta\, V_1(x(x',y'),y(x',y')) + \cos\theta\, V_2(x(x',y'),y(x',y')),\quad (x',y')\in\mathbb{R}^2.\end{aligned} \tag{27}$$

次に，微分演算子 grad, rot, div が座標回転でどのように形を変えるか調べる．

スカラー場 $f\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に対して $\mathrm{grad}\, f$ がベクトル場になると約束し，

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathrm{grad}}\, f_1(x',y')\mathbf{e'_x} + \tilde{\mathrm{grad}}\, f_2(x',y')\mathbf{e'_y} = \tilde{\mathrm{grad}}\,\mathbf{f}(x',y')\\ &= \mathrm{grad}\,\mathbf{f}(x(x',y'),y(x',y')) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(x',y'),y(x',y'))\mathbf{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(x',y'),y(x',y'))\mathbf{e_y},\quad (x',y')\in\mathbb{R}^2,\end{aligned}$$

とおくと，(27) より，

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{grad}}\, f_1(x',y') &= \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(x(x',y'),y(x',y')) + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(x(x',y'),y(x',y')),\\ \tilde{\mathrm{grad}}\, f_2(x',y') &= -\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(x(x',y'),y(x',y')) + \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(x(x',y'),y(x',y')),\quad (x',y')\in\mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

他方，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\, x(x',y')}{\partial x'} &= \cos\theta,\quad \frac{\partial\, y(x',y')}{\partial x'} = \sin\theta,\\ \frac{\partial\, x(x',y')}{\partial y'} &= -\sin\theta,\quad \frac{\partial\, y(x',y')}{\partial y'} = \cos\theta,\end{aligned}$$

だから，合成関数の微分法則より，

$$\tilde{\mathrm{grad}}\, f_1(x',y') = \frac{\partial\, f(x(x',y'),y(x',y'))}{\partial x'},\quad \tilde{\mathrm{grad}}\, f_2(x',y') = \frac{\partial\, f(x(x',y'),y(x',y'))}{\partial y'}.$$

ここで，右辺は $x=x(x',y')$ などを代入してから x',y' の関数として偏微分したもの[21]．こうして，$\mathrm{grad}\, f$ の成分表示は座標回転で形を変えない：

$$\mathrm{grad}\,\mathbf{f}(x(x',y'),y(x',y')) = \tilde{\mathrm{grad}}\,\mathbf{f}(x',y') = \frac{\partial\, f(x(x',y'),y(x',y'))}{\partial x'}\mathbf{e'_x} + \frac{\partial\, f(x(x',y'),y(x',y'))}{\partial y'}\mathbf{e'_y}.$$

（形式的にプライムを付けていけばよいという意味で形を変えない.）

[21] きちんと書くと，先ず，$g(x',y') = f(x(x',y'),y(x',y'))$ で定義される 2 変数関数 g を用意して，本文右辺は g の第 1 および第 2 変数についての偏微分とすべきである．但し，以下本文では，この手続きを省略したものをここのように，偏微分記号の中に変数を書いて表すことにする．

次に，ベクトル場 $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ に対して，再び合成関数の微分法則と (27) から，

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\mathbf{V}(x(x',y'),y(x',y')) = \frac{\partial V_1}{\partial x}(x(x',y'),y(x',y')) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x(x',y'),y(x',y'))\\
&= \frac{\partial x'(x,y)}{\partial x}\frac{\partial V_1(x(x',y'),y(x',y'))}{\partial x'} + \frac{\partial y'(x,y)}{\partial x}\frac{\partial V_1(x(x',y'),y(x',y'))}{\partial y'}\\
&+\frac{\partial x'(x,y)}{\partial y}\frac{\partial V_2(x(x',y'),y(x',y'))}{\partial x'} + \frac{\partial y'(x,y)}{\partial y}\frac{\partial V_2(x(x',y'),y(x',y'))}{\partial y'}\\
&=\cos\theta\frac{\partial V_1(x(x',y'),y(x',y'))}{\partial x'} - \sin\theta\frac{\partial V_1(x(x',y'),y(x',y'))}{\partial y'}\\
&+\sin\theta\frac{\partial V_2(x(x',y'),y(x',y'))}{\partial x'} + \cos\theta\frac{\partial V_2(x(x',y'),y(x',y'))}{\partial y'}\\
&=\frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x'}(x',y') + \frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial y'}(x',y')
\end{aligned}$$

従って， $\operatorname{div}\mathbf{V}$ がスカラーと約束すると，回転後の座標系によるその (x',y') における値は，元の定義で形式的にチルダとプライムを付ければよい，という意味で座標系の回転で形を変えない．

問 24 $\operatorname{rot}\mathbf{V}$ はどう変換されるか？ ◇

次に，座標の回転に対して線積分の形がどう変わるかを見る．曲線 C のパラメータ表示 $\mathbf{u}(t)=(x(t),y(t))$ は回転後の座標で成分表示すると

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = (x'(t),y'(t)) = (\cos\theta x(t)+\sin\theta y(t),\ -\sin\theta x(t)+\cos\theta y(t))$$

なので，$(x'(t))^2+(y'(t))^2 = x(t)^2+y(t)^2$ だから

$$\|\mathbf{u}(t_i)-\mathbf{u}(t_{i-1})\| = \|\tilde{\mathbf{u}}(t_i)-\tilde{\mathbf{u}}(t_{i-1})\|.$$

そこでスカラー場 f に対して，(24) に注意すると (8) の $S_{\Delta,\xi}$ は

$$S_{\Delta,\xi} = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{u}(\xi_i))\,\|\mathbf{u}(t_i)-\mathbf{u}(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \tilde{f}(\tilde{\mathbf{u}}(\xi_i))\,\|\tilde{\mathbf{u}}(t_i)-\tilde{\mathbf{u}}(t_{i-1})\|.$$

分割幅を 0 に近づける極限を取ると

$$\int_C f(\mathbf{u})\,ds(\mathbf{u}) = \int_C \tilde{f}(\tilde{\mathbf{u}})\,ds(\tilde{\mathbf{u}}).$$

即ち，形式的にチルダをつけるだけという意味で線積分は座標の回転で形を変えない．

ベクトル場の接線成分の線積分はどうだろうか．(9) の $S_{\Delta,\xi}$ の f にベクトル場 $\mathbf{V}=V_1\mathbf{e_x}+V_2\mathbf{e_y}$ の各成分を代入すると，(27) から，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n V_1(x(\xi_i),y(\xi_i))(x(t_i)-x(t_{i-1}))\\
&=\sum_{i=1}^n(\cos\theta\tilde{V}_1(x'(x(\xi_i),y(\xi_i)),y'(x(\xi_i),y(\xi_i))) - \sin\theta\tilde{V}_2(x'(x(\xi_i),y(\xi_i)),y'(x(\xi_i),y(\xi_i))))\\
&\times(\cos\theta(x'(t_i)-x'(t_{i-1})) - \sin\theta(y'(t_i)-y'(t_{i-1}))),
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n V_2(x(\xi_i),y(\xi_i))(y(t_i)-y(t_{i-1}))\\
&=\sum_{i=1}^n(\sin\theta\tilde{V}_1(x'(x(\xi_i),y(\xi_i)),y'(x(\xi_i),y(\xi_i))) + \cos\theta\tilde{V}_2(x'(x(\xi_i),y(\xi_i)),y'(x(\xi_i),y(\xi_i))))\\
&\times(\sin\theta(x'(t_i)-x'(t_{i-1})) + \cos\theta(y'(t_i)-y'(t_{i-1}))).
\end{aligned}$$

極限を取ると

$$\int_C V_1(x,y)dx = \int_C(\cos\theta\tilde{V}_1(x',y')-\sin\theta\tilde{V}_2(x',y'))\cos\theta dx' - \int_C(\cos\theta\tilde{V}_1(x',y')-\sin\theta\tilde{V}_2(x',y'))\sin\theta dy'.$$

これは新しい座標系では全く違う形である．同様に

$$\int_C V_2(x,y)dy = \int_C (\sin\theta\tilde{V}_1(x',y') + \cos\theta\tilde{V}_2(x',y'))\sin\theta dx' + \int_C (\sin\theta\tilde{V}_1(x',y') + \cos\theta\tilde{V}_2(x',y'))\cos\theta dy'.$$

両方加えると

$$\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u} = \int_C V_1(x,y)dx + \int_C V_2(x,y)dy = \int_C \tilde{V}_1(x',y')dx' + \int_C \tilde{V}_2(x',y')dy' = \int_C \tilde{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{u}})\cdot d\tilde{\mathbf{u}}$$

となって，形を変えない

問 25 法線成分の線積分 $\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}(t)\,ds(\mathbf{u})$ については座標の回転でどうなるか？ ◇

1.6.2 極座標表示．

極座標表示とは 2 変数関数 $x = x(r,\theta) = r\cos\theta,\ y = y(r,\theta) = r\cos\theta$, で定義される変数変換 $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{R})$ のことである．合成関数の微分法則定理 36 から，C^1 級関数 $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\partial r} &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta),\\ \frac{\partial f(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\partial \theta} &= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta).\end{aligned} \tag{28}$$

ここで左辺は代入して r,θ の関数として微分すること，右辺は微分してから代入することを意味する[22]．これらを x, y 偏微分について解いて

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \cos\theta\frac{\partial f(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\partial \theta},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \sin\theta\frac{\partial f(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\partial \theta}.\end{aligned} \tag{29}$$

（こちらでは (28) と辺が逆になって，左辺が偏微分してから代入，右辺が代入してから偏微分.）

極座標では x–y 座標系と異なって，点の位置によって座標軸の方向が異なる．即ち動径方向ベクトル $\mathbf{e_r}$ と偏角方向ベクトル $\mathbf{e}_\theta$ は共に平面上の位置の関数（ベクトル場）になっている．その具体形を元の座標で書くと，

$$\begin{aligned}\mathbf{e_r}(x,y) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),\\ \mathbf{e}_\theta(x,y) &= \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),\end{aligned} \tag{30}$$

とおくと $\|\mathbf{e_r}\| = \|\mathbf{e}_\theta\| = 1$, $\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{e}_\theta = 0$．また， $\mathbf{V}$ の極座標に関する成分表示を

$$\mathbf{V}(r\cos\theta, r\sin\theta) = V_r(r,\theta)\mathbf{e_r}(r\cos\theta, r\sin\theta) + V_\theta(r,\theta)\mathbf{e}_\theta(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

とおくと，その具体形は

$$\begin{aligned}V_r(r,\theta) &= (\mathbf{V}\cdot\mathbf{e_r})(r\cos\theta, r\sin\theta),\\ V_\theta(r,\theta) &= (\mathbf{V}\cdot\mathbf{e}_\theta)(r\cos\theta, r\sin\theta),\end{aligned}$$

となる．

特に，(29) から

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_r}{\partial x}(r,\theta) &= \cos\theta\frac{\partial V_r}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}(r,\theta),\\ \frac{\partial V_r}{\partial y}(r,\theta) &= \sin\theta\frac{\partial V_r}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}(r,\theta).\end{aligned}$$

[22] きちんと書くと，先ず，$\tilde{f}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で定義される 2 変数関数 $\tilde{f}$ を用意して，左辺は $\tilde{f}$ の第 1 および第 2 変数についての偏微分とすべきである．但し，以下本文では，この手続きを省略したものをここのように，偏微分記号の中に変数を書いて表すことにする．

ここで左辺は，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ の逆関数を $r(x,y)$, $\theta(x,y)$ と書くとき，r, θ の関数 V_r に $r = r(x,y)$, $\theta = \theta(x,y)$ を代入して x, y の関数としてから x, y で偏微分したものに，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を代入し直した (従って，元の変数に戻した) ものを意味する．V_θ についても全く同様の式を得る．

また，(30) から

$$\operatorname{div}\mathbf{e_r}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \operatorname{div}\mathbf{e}_\theta(x,y) = 0, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

以上を

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \operatorname{grad}V_r \cdot \mathbf{e_r} + V_r \operatorname{div}\mathbf{e_r} + \operatorname{grad}V_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta + V_\theta \operatorname{div}\mathbf{e}_\theta$$

に代入して整理すると，$(x,y) \neq (0,0)$ で

$$\operatorname{div}\mathbf{V}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial V_r}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r}V_r(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}(r,\theta)).$$

このようにして，極座標表示 r, θ, $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e}_\theta$ を用いてスカラー場やベクトル場の微分を書き直す公式を得ることができる．

問 26 $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{rot}\mathbf{V}$ を極座標で書き直してみよ． ◇

2 空間上のベクトル解析．

2.1 空間ベクトルと空間における grad, div, rot．

2.1.1 空間 (3 次元) ベクトル．

実数 3 つ $(u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R})$ を一組にした量 (u_1, u_2, u_3) を全て集めた集合 $\mathbb{R}^3$ は，実線型空間 (実ベクトル空間) の構造を持つ．成分を 2 から 3 に変えるだけで，和，スカラー倍，内積，ノルム，は §1.1.1 と同様に定義され，同様の性質を持つ．$\mathbb{R}^3$ の要素は線型演算を意識するとき，空間 (3 次元) ベクトルと言い，空間上の点と対応する．

3 次元ベクトルには外積が定義される．$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\mathbf{u}\times\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ であり（内積と違って，かけ算の結果はベクトルである！），その定義は,

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

である．特に，$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\mathbf{v}\times\mathbf{u}$，従ってさらに，$\mathbf{u}\times\mathbf{u} = 0$．

外積の幾何学的意味付けは次の通り．

命題 19 *$\mathbf{u}\times\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ の方向は $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が作る平行四辺形 (原点と $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ と $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ が 3 頂点を占める平行四辺形) に垂直 (即ち，$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ どちらとも直交するベクトル) で，向きは $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ が右手系 (1 つ目から 2 つ目に向かって右ねじが進む方向，即ち，ねじを右回ししたとき奥に進む方向が 3 つ目) を作り，大きさは，$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が作る平行四辺形の面積に等しい．*

証明．上記の証明．$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ と直交することは定義から直接計算．向きは，例えば第 3 成分の符号を見ればよい．このとき $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ を 1–2 平面に射影してその影でねじを回せばいいから，平面ベクトル (u_1, u_2) から (v_1, v_2) に向かって右回しになるのが平面のどっちから見たときかを考えればいい．$v_2/v_1 > u_2/u_1$ ならば右ねじが進む方向は第 3 軸正の方向．大きさは,

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 + |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2,$$

即ち，$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ のなす角を θ とするとき,

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\sqrt{1-\cos^2\theta} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,|\sin\theta|.$$

右辺は問題の平行四辺形の面積である． □

問 27 $\mathbf{u} = (1,0,0)$ とし， $\mathbf{v}$ を $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ から選ぶとき，それぞれについて $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ を計算し，命題 *19* を確かめよ． ◇

外積は双線型反可換な演算 $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ で，

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \tag{31}$$

を満たす．（これは直接計算で分かる．）

命題 20 *(31)* は $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ の *3* つのベクトルが右手系をなすときそれらが作る平行六面体の体積であり，左手系をなすとき平行六面体の体積で符号をマイナスにしたものである．

証明. $\mathbf{v}$ と $\mathbf{w}$ が作る平行四辺形を□，□と $\mathbf{u}$ のなす角を θ，□の面積を S とすると $S = \|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|$ であり，$\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ は，□と直交するので， $\mathbf{u}$ となす角は $\pi/2-\theta$ である．問題の平行六面体の体積は

$$S\,\|\mathbf{u}\|\sin\theta = \|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|\,\|\mathbf{u}\|\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\|\,.$$

符号は明らかだろう． □

問 28 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ を簡単な例に選んで，命題 *20* を確かめよ． ◇

次の公式も頻繁に用いられる．

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}.$$

特に，外積は結合法則が一般には成り立たないことに注意.

2.1.2 3 次元空間における grad, div, rot．

§1.6 で定義したように，平面ベクトル場とは平面から 2 次元ベクトル空間 $\mathcal{V}$ への関数 $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^2\to\mathcal{V}$ のことをいう．$\mathcal{V}$ が内積を持つとき，$\mathcal{V}$ に正規直交基底をとって，$\mathbb{R}^2$ と同一視できる (§A.4.1) ので，§1.1.2 では $\mathbb{R}^2$ 上の写像 $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ として平面ベクトル場を定義した．

同様に (3 次元) 空間では，(3 次元) ベクトル場を空間から 3 次元ベクトル空間 $\mathcal{V}$ への関数 $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^3\to\mathcal{V}$ のこととする．$\mathcal{V}$ が $\mathbb{R}^3$ と同一視できるとき (§A.4.1) のみを考えて，座標変換を議論しないときはベクトル場を $\mathbb{R}^3$ 上の写像 $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ と区別しない．

3 次元スカラー場とは平面から 1 次元ベクトル空間 ($\mathbb{R}$) への関数である．

平面スカラー場または平面ベクトル場の和集合から平面スカラー場または平面ベクトル場の和集合への微分演算として， grad, div, rot を，それぞれ，§1.3, §1.4.4, §1.5.1 で定義した．これらは 3 次元空間でも重要であり，スカラー場 $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ およびベクトル場 $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ に対してそれぞれ次のように定義される．

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right),\\
\operatorname{div}\mathbf{V} &= \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z},\\
\operatorname{rot}\mathbf{V} &= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}, \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right).
\end{aligned} \tag{32}$$

場が第 3 成分依存性を持たないときにはこれらは平面ベクトル場における定義に帰着することに注意（grad の場合は第 3 成分を無視し，rot については第 3 成分のみに注目する）．この意味で平面ベクトル場の場合の拡張定義になっている．

問 20 の公式に対応して 3 次元の場合の公式を列挙しておく．

問 29 *(1)* f, g を C^1 級スカラー場， $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ を C^1 級ベクトル場，とするとき以下を証明せよ．(rot や外積 $\times$ が入ると符号が複雑なので，そういう場合は $(x,0,0)$ や $(-y,x,0)$ などの特別なベクトル場をうまく選んで両辺の符号を確認せよ．)

(a) $\mathrm{grad}(f\,g) = (\mathrm{grad}\,f)\,g + f\ \mathrm{grad}\,g$

(b) $\mathrm{div}(f\,\mathbf{V}) = (\mathrm{grad}\,f)\cdot\mathbf{V} + f\ \mathrm{div}\,\mathbf{V}$

(c) $\mathrm{rot}(f\,\mathbf{V}) = (\mathrm{grad}\,f)\times\mathbf{V} + f\ \mathrm{rot}\,\mathbf{V}$

(d) $\mathrm{div}(\mathbf{U}\times\mathbf{V}) = (\mathrm{rot}\,\mathbf{U})\cdot\mathbf{V} - \mathbf{U}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{V}$

(e) $\mathrm{rot}(\mathbf{U}\times\mathbf{V}) = (\mathbf{V}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{U} + \mathbf{U}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{V}) - (\mathbf{U}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{V} - \mathbf{V}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{U})$

(2) f を C^2 級スカラー場， $\mathbf{V}$ を C^2 級ベクトル場，とするとき以下を証明せよ．

(a) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,f = 0$

(b) $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

*(*右辺を Δf と書いて Δ を *(*3 次元*)* ラプラス作用素という． *)*

(c) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = \mathbf{0}$

(d) $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathbf{V}) - \Delta\mathbf{V}$

*(*ただし， $\Delta\mathbf{V} = (\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta V_z)$ の意味とする[23].

次の記号を使うと機械的に計算できて便利である． δ_{ij}, $i,j=1,2,3$, は $i=j$ のとき 1 そうでないとき 0 とする *(Kronecker* の記号*)*. $\mathcal{E}_{ijk}$, $i,j,k=1,2,3$, は ijk が 123 から偶数回の互換で得られる並びのとき 1 奇数回の互換で得られる並びのとき -1 それ以外 *(*同じ数字が 2 度出るとき*)* 0 とする．そうすると，例えば

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{V})_i = \mathcal{E}_{ijk}\partial_j V_k$$

などと書ける．ここで同じ添字が 2 度現れたらその添字について 1 から 3 まで和を取ると約束する *(Einstein* の約束*)*. また， $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$． 定義から $\mathcal{E}_{ijk} = -\mathcal{E}_{jik}$ 等を得るが，さらに

$$\mathcal{E}_{ijk}\mathcal{E}_{i\ell m} = \delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell}$$

が成り立つ（左辺は *Einstein* の約束に注意）．これを一度証明しておけば，あとは機械的に計算できる．

◇

これらの公式は，直接計算すれば証明できる単純なものだが，この先極めて頻繁に用いられるので，覚えておくとよい．

2.2 曲面と面積分．

2.2.1 曲面の定義．

平面上 §1 では曲線を定義すれば事足りたが，3 次元空間では曲面も考えないといけない．曲線は実パラメータ 1 つで表示できるので，(区分的に連続ならば) パラメータを時間とみなして時間順に追っていくと，自分が既に通ってきた点で自分自身と交わることだけを気にすれば十分であった．例えば閉曲線は出発点に戻る曲線というだけですむ．

曲面はこのような単純なみかたはない．実際，穴のたくさん開いたドーナツのような複雑な形がいくらでも考えられる．高次元の曲がった空間の上で微積分学を展開するのに扱いやすい定義として多様体という概念が今日では採用される．この精神に沿って曲面を見ると，曲面とは十分小さな部分開集合を考えると，$\mathbb{R}^2$ と 1 : 1 連続対応がある (同相)，という見方ができる．石膏像を作るときに小さな紙を模型に貼り付けて型にする気持ちである．ドーナツは $\mathbb{R}^2$ と同相な「紙」を貼り付けて作れば穴がいくつ開いていても統一的手法で作れる．$\mathbb{R}^2$ には自然に座標が入っているから，これを曲面の部分開集合の座標 (局所座標) とすれば，微積分学が行える．

[23] スカラー場に対する Δ の作用素の自然な拡張に見えるかも知れないが，座標変換に対する変換性がスカラー場とベクトル場の成分では異なるので，曲がった座標系を使い始めると必ずしも良い記号ではない．気をつけること．

かくして，曲面[24]を次のように定義できる．

3 次元空間の部分集合 $S \subset \mathbb{R}^3$ が曲面 (surface) であるとは，任意の点 $P \in S$ に対して $\epsilon = \epsilon_P > 0$ と 2 次元開集合 $U = U_P \subset \mathbb{R}^2$ と何回でも全微分可能な写像 $\varphi = \varphi_P :\ U \to \mathbb{R}^3$ があって，以下が成立することをいう[25]．

(1) φ の像を $\varphi(U)$ と書くと $\{Q \in S \mid d(Q,P) < \epsilon\} \subset \varphi(U) \subset S$.（$d$ は $\mathbb{R}^3$ のユークリッド距離.）
(2) φ は単射.
(3) φ は何回でも全微分可能.
(4) $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$ のヤコビ行列 $D\varphi$ の階数 (§A.4.2) は U の全ての点で 2 である．ここで,

$$(D\varphi)(s,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial s}(s,t) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(s,t) \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial s}(s,t) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(s,t) \\ \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial s}(s,t) & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial t}(s,t) \end{pmatrix}, \quad (s,t) \in U,$$

とおいて，パラメータ表示 φ のヤコビ行列という.

最初の 2 つの条件は，S の P の近傍が $U \subset \mathbb{R}^2$ と φ によって $1:1$ 対応すること，残りの条件はその対応が,「滑らか」であること，を意味する.（簡単ため，何回でも微分可能とした.）最後の条件は (3) に対応する．即ち，滑らかなパラメータとして実空間の座標成分 x, y, z のうちの 2 つをとることができる（どの 2 つかは点によって異なる）.

例 30 $\varphi(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = (s^2, t^2, st)$ で定義される $\varphi :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ に対して,

$$(D\varphi)(s,t) = \begin{pmatrix} 2s & 0 \\ 0 & 2t \\ t & s \end{pmatrix}$$

なので $rank$ が 2 でない点は $(s,t) = (0,0)$.

概形を求めるには,

$$x = \frac{X+Z}{\sqrt{2}},\ y = \frac{Z-X}{\sqrt{2}},\ z = \frac{Y}{\sqrt{2}},$$

と座標変換すると,

$$(X(s,t), Y(s,t), Z(s,t)) = \left(\frac{s^2-t^2}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}\,s\,t,\ \frac{s^2+t^2}{\sqrt{2}}\right)$$

となるので,

$$Z^2 = X^2 + Y^2$$

即ち，$(0,0,0)$ を頂点とし， Z 軸を軸として，その正方向に延びる円錐で，傾き *(*面上の頂点からの半直線と軸のなす角*)* が 45 度の円錐である.

もっとも，このパラメータは $\pm(s,t)$ が同一点を表す $2:1$ 写像なので，$(s,t) = (0,0)$ の近傍では， $1:1$ かつ C^∞ 写像ではない[26].

[24] 以下，簡単のために極めて滑らかな C^∞ 曲面のみを考える.
[25] 以下，TEX コマンドが面倒なので，パラメータ表示に関してはベクトル表記 $\boldsymbol{\varphi}$ をせずに，φ と書く.
[26]

(1) [5, §2.1 問 1] は $(0,0)$ 付近で $1:1$ でないので，$D\varphi$ の rank だけに注目したい例としては不満かも知れない.
(2) （2001 年，名古屋大学大学院多元数理科学研究科に在職していた頃の注.）太田啓史さんに伺ったところによると（わたしが正しく理解しているかどうか怪しいが），特異点の近傍をパラメータ表示する問題は，d 次元多様体 X を d' 次元多様体 Y に滑らかに埋め込めるかという問題としてとらえるのが自然とのこと．どんな X も $d' \geqq 2d+1$ なる Y に滑らかに埋め込めることが分かっていて，$d' = 2d$ までは一般論があるので， $d' = 2d-1$ が難しい最初のケース，従って $\mathbb{R}^3$ の中の曲面 $(d = 2,\, d' = 3)$ は難しい中の基礎的なケース．この場合について，rank 1 の generic case の分類は分かっていて，Arnold の標準形は 1 つだけ，Whittney の umbrella と呼ばれる曲面で $\varphi(s,t) = (s^2, t, st)$ で定義される．あとはこれの「近似列」で得ることになる．ただ，generic というのは全ての特異点近傍をこの形で書けるという意味ではないらしい.
[9] に特異点理論の概説があるらしい．名大多元には実多様体をやっている人はあまりいないらしく，聞くとことによると塩田さんがずいぶん前に少しやっていた程度ではないかとことであった.

◇

曲面 S の定義の φ_P を S の P の近くでの局所パラメータといい，$S \subset \bigcup_{i \in I} \varphi_i(U_i)$ を満たす局所座標の族 $\{\varphi_i\colon\ U_i \to \mathbb{R}^3 \mid i \in I\}$ を局所パラメータ系という[27]．以後，曲面のパラメータ表示というときは，断りなく，曲面の定義の性質を満たしているものを取る．

先ほどの例では，円錐面から頂点を除いた集合は曲面であり，上記のパラメータも，例えば， $s > 0$ に限るか $t > 0$ に限れば $1:1$ かつ C^∞ で $D\varphi$ が rank 2 になる．両者で原点を除く全円錐面を覆えるから，パラメータ系になる．

問 31 球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ に対して，球面極座標表示に基づくパラメータ

$$\varphi(s, t) = (\cos s\ \sin t, \sin s\ \sin t, \cos t)$$

は $U = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < s < 2\pi,\ 0 < t < \pi\}$ における局所パラメータを与える．U の外に出ると，$1:1$ でなくなるので，U がこれを局所パラメータとするぎりぎり一杯の広さである．$U = S^2 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqq 0,\ y = 0\}$ なので，残りの部分を覆うには，例えば $\varphi_2(s, t) = (\cos s\ \sin t, \cos t, \sin s\ \sin t)$ を $U_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < s < \pi,\ 0 < t < \pi\}$ で考えればよい．

以上を確かめよ． ◇

例 32 曲面の例．

球： $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

輪： $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ |z| < 1\}$.

メビウス (Möbius) の帯： $\{((2 + t\cos\frac{s}{2})\ \sin s,\ (2 + t\cos\frac{s}{2})\ \cos s,\ t\sin\frac{s}{2}) \mid s \in \mathbb{R},\ |t| < 1\}$.

（*[5, 例 2.12]* では上記のように $s \in \mathbb{R}$ と略記しているが，正確に言うと，例えば，$U_1 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < s < \pi,\ |t| < 1\}$ を定義域とする上記のパラメータを φ_1，$U_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}\pi < s < \frac{5}{2}\pi,\ |t| < 1\}$ を定義域とする上記のパラメータを φ_2，とすると，それぞれ $1:1$ 写像なので $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ がメビウスの帯のパラメータ系となる，という意味である．

従って，例えば， $\varphi(0, t)$ と $\varphi(2\pi, 0)$ が同じ点を表す *($\varphi(0, t) = \varphi(2\pi, 0)$)* というのは $\varphi_1(0, t) = \varphi_2(2\pi, t)$ の略記とする．）

◇

問 33 例 *32* に曲面の例として挙げたものが曲面の定義を満たすことをたしかめよ．
（即ち，曲面の条件を満たすパラメータ表示を見つけよ，ということ．§B も参照．） ◇

曲面の定義の最初の前提から，曲面というときは縁はないか縁の点を集合から除いて考えている．上の例で輪は縁があるが，縁の点は集合から除いている．これに対して，縁も集合に加えた場合は縁付きの曲面（境界のある曲面）という[28]輪に縁の点を付け加えたもの $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ |z| \leqq 1\}$ は縁の点 $(|z| = 1)$ が開近傍を持たないので，この講義でいう曲面ではないが，縁付の曲面である．

精密に言うと， S が縁付の曲面とは，S の各点 P 毎に，曲面の定義と同じ条件 (P の近傍を像とする，C^∞ 級，$1:1$，$D\varphi$ の rank が 2) を満たす $\varphi(0, 0) = P$ なるパラメータ φ がとれて，しかもその定義域 U として，円 $\{(s, t) \mid s^2 + t^2 < 1\}$ または半円 $\{(s, t) \mid s^2 + t^2 < 1,\ t \geqq 0\}$ をとれるときをいう ([1, 328B])．そして半円の中心に対応する P の集合を S の境界 ∂S という．

[27]多様体論では，曲面自体を扱いたいので，それが $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれているというイメージはなるべく導入しない．そこで，この講義でいう実空間 ($\mathbb{R}^3$) の座標は用語として使わないで，曲面のパラメータ表示 (s, t) を座標と呼ぶ [5, §2.1]．即ち，この講義で局所パラメータと呼ぶものは局所座標 (local coordinate)，パラメータ系と呼ぶものは局所座標系 (local coordinate system) と呼ばれる．この講義では，常に $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた曲線や曲面を扱うので，平面の節や，微積分学とのつながりを重視して（多様体論の標準的用語に逆らって），パラメータと呼び続ける．進んだ勉強や幾何方面の講義を受けるときは注意すること．

[28][1, 90A, 328B] をていねいに読むと，こういうことになる．しかし，なんとなく，輪の例では自動的に縁も加えて，縁付の曲面とみなしている気がする．

2.2.2 接平面と法ベクトル．

(空間の中の) 平面とは，少なくとも 1 つは 0 でない実定数 a, b, c, d を用いて $S = \{(x, y, z)\mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}$ と書ける集合 S のことをいう．

問 34 平面 $S = \{(x, y, z)\mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}$ に対して以下を証明せよ．

(1) 平面上の点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ を 1 つ任意に取ってきて固定すると，S の点 $(x, y, z) \in S$ は全て $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ を満たす．

(2) S の**全ての**点 P に対して，P_0 を始点とし P を終点とするベクトルに直交するベクトル $\mathbf{v}$ は，定まったベクトル (a, b, c) と $\mathbf{v}$ に応じて決まる実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ を用いて $\mathbf{v} = \lambda(a, b, c)$ と書ける．つまり，一次独立なものは 1 つしかない．
この性質を持つベクトルを，平面 S の法ベクトルという．

(3) 空間の中の平面は，その上の 1 点 P_0 と 2 次元線型空間 *(*ベクトル空間*)* で定まる．即ち，平面は一次独立な 2 つ一組のベクトルで張られ，一次独立な 2 つのベクトルは平面を張る．
詳しく言うと，S とその上の点 P_0 に対して，互いに一次独立なベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ を選んで $S = \{P_0 + \alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ と書くことができる．逆に，互いに一次独立なベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ が与えられたとき，$S' = \{P_0 + \alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ は P_0 を通る平面である．即ち，$\mathbf{p}, \mathbf{q}$ から決まる実定数 a, b, c を用いて $S' = \{(x, y, z)\mathbb{R}^3 \mid a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0\}$ と書ける．

◇

$S \subset \mathbb{R}^3$ を曲面とし，その上の点 $P \in S$ をとる．φ を P の近傍での S のパラメータ表示とし，$P = \varphi(s_0, t_0)$ とする．曲面の定義 (§2.2.1) から $D\varphi(s_0, t_0)$ は rank 2 の 3×2 行列である．よって $D\varphi(s_0, t_0)$ の 2 つの列ベクトル $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}(s_0, t_0)$ と $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(s_0, t_0)$ は一次独立 (命題 49) なので，P を含むある平面を張る (問 34)．この平面を $P + T_P(S)$ と書いて曲面 S の点 P での接平面という[29]．平面 $T_P(S)$ に含まれるベクトル（P を始点とし，平面内のかってな点を終点とするベクトル）を接ベクトルという．

全ての接ベクトルと直交するベクトルを法ベクトルという．法ベクトルは定数倍を除いて定まる (問 34)．即ち，法ベクトルの集合は 1 次元線型空間をなす．長さ 1 の法ベクトルを単位法ベクトルという．$\mathbf{v}$ が法ベクトルならば $-\mathbf{v}$ も法ベクトルなので，法ベクトルはちょうど 2 つある．

命題 21 曲面 S 上の点 P の近傍のパラメータ表示 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して，$P = \varphi(s_0, t_0)$ とおくと，P における S の単位法ベクトルは

$$\pm\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial s} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}}{\left\|\dfrac{\partial\varphi}{\partial s} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|}(s_0, t_0)$$

で与えられる．

証明. $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ は $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}$ と $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ に直交するから法ベクトルである．
（Normalizable なこと，即ち，$\mathbf{0}$ でないこと，は $D\varphi$ の rank が 2 であることから従う.） □

2.2.3 パラメータ変換．

平面の中の曲線の場合はパラメータ表示 φ は $1:1$ のなめらかな 1 変数関数なので (§1.2.1)，パラメータを取り替えるといっても，単調かつ滑らかな関数の違いだけで，難しいことはない．空間の中の曲面では局所パラメータの「張り合わせ」でパラメータ系を定義したので，パラメータの変換には「張り合わせ」との整合性という重要な論点がある（というより，曲面の複雑さ故にパラメータ系という記述が必要だった）．

[29] P における接平面という以上は P を通っているべきだと思うけど，他方 [5, §2.1(c)] が $T_P(S)$ と書くときは，線型空間，即ち，0 を通る平面．ベクトル OP だけずれがあると思うが，プロはどう使い分けているのだろう？

命題 22 曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ の 2 つの局所パラメータを $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$, $\varphi'\colon U' \to \mathbb{R}^3$ $(U, U' \subset \mathbb{R}^2)$ とし，その重なりを，

$$W = \{(s,t) \in U \mid \varphi(s,t) \in \varphi'(U')\}, \quad W' = \{(s,t) \in U' \mid \varphi'(s,t) \in \varphi(U)\}$$

とおく[30]．このとき $\psi\colon W \to W'$ が存在して以下が成り立つ．

(1) $\varphi' \circ \psi(s,t) = \varphi(s,t)$, $(s,t) \in W$.

(2) ψ の逆像 $\psi^{-1}\colon W' \to W$ が存在して，ψ, ψ^{-1} ともに C^∞ 級である.（このことを， ψ が可微分同相写像 *(diffeomorphism)* である，という.）

証明. $(s,t) \in W$ に対して仮定から $\varphi(s,t) = \varphi'(u,v)$ なる $(u,v) \in W'$ が存在する． φ' は単射だからこのような (u,v) は 1 つに決まるので， $\psi(s,t) = (u,v)$ とおく，即ち， $\psi = \varphi'^{-1} \circ \varphi$ とおくと，$\psi\colon W \to W'$ は $\varphi' \circ \psi = \varphi$ を満たす．逆に，$(u,v) \in W'$ に対して仮定から $\varphi(s,t) = \varphi'(u,v)$ なる $(s,t) \in W$ がただ 1 つ存在するので $\psi^{-1}(u,v) = (s,t)$ とおけば，ψ^{-1} は ψ の逆像である．

ψ が C^∞ 級であることを示せば ψ^{-1} についても同様である．$(s,t) \in W$， $(u,v) = \psi(s,t) \in W'$ とする．$D\varphi'(u,v)$ の rank は 2 だから 2 次小行列式の 1 つは 0 でない．定理 39 から，対応する W' 上の 2 成分関数は $\varphi'(u,v)$ の対応する 2 成分からなる $\mathbb{R}^2$ の点の開近傍 V で定義された C^∞ 級逆関数 $\phi\colon V \to \mathbb{R}^2$ が存在する．仮に x, y の 2 成分とすると，$\phi \circ (\varphi'_1, \varphi'_2)(x,y) = (x,y)$, $(x,y) \in V$．一方， $\varphi' \circ \psi = \varphi$ だから $(\varphi'_1, \varphi'_2) \circ \psi = (\varphi_1, \varphi_2)$．よって $\phi \circ (\varphi_1, \varphi_2) = \psi$．左辺は C^∞ 級だから ψ も C^∞ 級である． □

2.2.4 曲面の向き.

曲面の向きは，単位法ベクトル (§2.2.2) の符号を決めることで決まる．これはベクトル場の法線成分についての面積分 (§2.2.5) を考えるときに必要になる．平面曲線 (§1.4.1) の場合はパラメータ表示をもって曲線の向きと呼んだ．ここでは，関数 (の同値類) をもって向きと呼ぶことは同様だが，より図形的に $S \subset \mathbb{R}^3$ 上の関数で定義する．即ち，

> 曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ の向きとは $\mathbf{n}\colon S \to \mathbb{R}^3$ なる連続写像で，各 $P \in S$ に対して $\mathbf{n}(P)$ が単位法ベクトルであるようなものをいう．
> この性質を満たす $\mathbf{n}$ がとれるとき， S は向き付け可能 (orientable) という．

$\varphi\colon U \to S$ を S のパラメータ表示とするとき，命題 21 より，S の向きは

$$\mathbf{n}(\varphi(s,t)) = \pm \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial s} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}}{\left\| \dfrac{\partial\varphi}{\partial s} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \right\|}(s,t), \quad (s,t) \in U, \tag{33}$$

で与えられる． φ は連続なので，U が弧状連結ならば符号 $\pm$ は (s,t) によらず，どちらか一方だけである．符号が正のとき， φ は向きを保つパラメータであると (この講義では) いう．

曲面 S が ($\mathbb{R}^3$ の中で) コンパクトなとき，閉曲面という．即ち，曲面 S が有界閉集合 (定理 50) であるとき閉曲面という．閉集合と言っても，縁があるとこの講義の曲面の定義に合わない (例 32) ので，球面などのように $\partial S = \emptyset$ を満たす曲面 (であって，有界なもの) を指す．次の定理により，閉曲面は向き付け可能であるが，定理 12 と同様，この事実を証明抜きで認める．

---

[30] [5, §2.1(d)] では，それまで P は空間の点を表していたのに，急にパラメータ平面の点を表すことに変えているので注意．ついでに，同書 §2.2 では $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}(\varphi(s,t))$ などと書かれているが，もちろん $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)$ などの誤り．さらに，§2.2(b) 式 (2.2) 付近では ∂s などが ds などの誤植がある．読むときは混乱しないように注意．

なお，この本は読みやすく意欲的な本だと思うが，平面ベクトル場 [5, §1] でパラメータと呼んでいたものを，[5, §2] で何の説明もなく座標と呼び変えたのは教科書としては納得できない．$\mathbb{R}^2$ に埋め込まれた曲線という見方から多様体としての曲面という見方への転換は説明せずにやるには重大すぎるし，この教科書の趣旨から考えると，多様体には踏み込まないほうがいいと思う．

講義ではパラメータと呼び続けることにする．

定理 23 閉曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ は弧状連結とする．このとき，$S^c = \mathbb{R}^3 \setminus S$ は共通点を持たない開集合で，一方が有界，他方が非有界である．有界なほうを S が囲む領域という．

系 24 *($\mathbb{R}^3$ の中の) 弧状連結な閉曲面は向き付け可能である.*

証明. S は $\mathbb{R}^3$ を内部と外部に分けるから，$P \in S$ と P における単位法ベクトル $\mathbf{n}$ (2 つのいずれか 1 つ固定) に対して $\epsilon > 0$ を十分小さく取って，点 $P - \epsilon\mathbf{n}$ と点 $P + \epsilon\mathbf{n}$ を結ぶ線分が S と P 以外で交わらないようにすれば[31]， $P \pm \epsilon\mathbf{n}$ の一方は S が囲む領域の内部，他方は外部にある．必要なら符号をとりなおして，正符号のほうが外部にあるように $\mathbf{n}(P)$ を決めると，明らかに P に関して連続である．

□

閉曲面について上の意味で外向きにとった法ベクトル $\mathbf{n}\colon\ S \to \mathbb{R}^3$ を標準的な向きという．

$\mathbb{R}^3$ の有界な領域 Ω が滑らかな境界を持つとは，境界 $\partial\Omega$ が閉曲面であることをいう．$\partial\Omega$ の向きは Ω の内部から外部に向かう向きとする．上で定義した「標準的な向き」は有界な領域から外に向かっているので，例えば，Ω が 2 つの同芯球面の間の領域だと，内部の球面では，標準的な向きは原点から遠ざかる向き (即ち Ω に入り込む向き) だが，$\partial\Omega$ の向きは原点に向かう向きである．

問 35 問 *31* に与えた球面のパラメータ系は標準的な向きを保つか？ ◇

曲線の向きは，曲線の接線方向だったが，90 度回転させれば法線方向になるので，この点での定義の違いは重要でない．しかし，曲線がパラメータの増大する方向に向きを考えれば十分だったのに対して，曲面ではその見方はうまくない（だから，図形に密着した定義に変更した）．また，その目的も曲面上の視点の移動方向ではなく，曲面を境界にして内部と外部を分けること (曲線の場合の定理 12 の視点) にある（だから，法ベクトルで定義した）．

$1:1$ 連続曲線に対しては必ず向きが存在するが，向きが定義できない曲面がある．

例 36 メビウスの帯 *(例 32)*．向き付け可能とすると，*(33)* より，特に，$t = 0$ *(帯の中心線)* で

$$\mathbf{n}(\varphi(s,0)) = \pm(-\sin s\,\sin\frac{s}{2}\,,\ -\cos s\,\sin\frac{s}{2}\,,\ \cos\frac{s}{2}).$$

メビウスの帯は弧状連結なので複号はいづれか一方である．ところが，$\varphi(0,0) = \varphi(2\pi,0)$ なので *(この意味は例 32 の注釈を参照)*，$\mathbf{n}(\varphi(0,0)) = \mathbf{n}(\varphi(2\pi,0))$，即ち，$(0,0,\pm1) = (0,0,\mp1)$ となり，どちらの符号をとっても矛盾．よって向き付け不可能である． ◇

2.2.5　面積分．

線積分は，曲線の長さやスカラー場やベクトル場の線積分を折線近似（分点間の距離 $\|\mathbf{u}(t_i) - \mathbf{u}(t_{i-1})\|$ の極限）で定義した (§1.2.2, §1.2.3, §1.2.4) が，曲面では，その上に代表点 $\{\varphi(s_i,t_i)\}$ をとって多面体 (例えば三角形上に結んで多面体とする) の面積では極限が定まらないことがある [2, §97 付記][32]．直感的にも妥当な見方として，曲面を小さな領域に分割して，各部分の接平面への正射影の面積（これは平面上の領域の面積だから，重積分の場合 §A.3.2 の矩形分割と同じである）の和の，微小領域を小さくする極限をもって面積とする．曲面のパラメータ表示 φ は滑らかだから，$\mathbb{R}^3$ で微小距離ということとパラメータ平面 $U \subset \mathbb{R}^2$ で微小距離ということは同値である．あとはパラメータ平面 U の小矩形の面積と，曲面における対応する領域の領域内の 1 点での接平面への正射影の面積の比を求めておけば曲面の面積の妥当な定義が見つけられるはずである [2, §97]．

$\varphi\colon\ U \to S$ を曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ のパラメータ表示とし，$(s_0,t_0) \in U$ をとる．対応する S の点を $P_0 = \varphi(s_0,t_0)$ とする．$T_S(P_0)$ (P_0 における S の接平面を平行移動して，P_0 の位置が原点になるようにしたもの) は，

[31] そのようにできるのは，パラメータが $1:1$ であることと，S のコンパクト性に基づくが，この議論も省略する．

[32] 文献には Schwarz の例として，高さ 1 半径 1 の円筒を高さと周に沿ってそれぞれ等分して三角形による内接多面体を作ると，高さ方向の分割を周方向より速く小さくすると，円筒の直感的な表面積より大きくなることが示されている．

周方向を 2 等分する，という極端な場合を考えると，問題点は明らかだが，折線近似の無反省な拡張は適当でないことも確かである．

$D\varphi(s_0,t_0)$ の (一次独立な) 2 つの列ベクトル $\mathbf{p_0}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}(s_0,t_0)$ と $\mathbf{q_0}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(s_0,t_0)$ で張られるので，平面 $T_S(P_0)$ のパラメータ表示として

$$(X,Y,Z)=\alpha\mathbf{p_0}+\beta\mathbf{q_0},\quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

をとれる．$\mathbb{R}^3$ の任意の点 $P=(x,y,z)$ に対して，その $T_S(P_0)$ への正射影 $Q=(X,Y,Z)$ は ($\exists\lambda\in\mathbb{R}$; $Q=P+\lambda\mathbf{n}$ と $Q\in T_S(P_0)$ の 2 条件を解くことで)

$$\begin{aligned}(X,Y,Z)&=\frac{1}{\|\mathbf{p_0}\|^2\|\mathbf{q_0}\|^2-(\mathbf{p_0}\cdot\mathbf{q_0})^2}\\ &\times\Big(\left(\|\mathbf{q_0}\|^2(x,y,z)\cdot\mathbf{p_0}-\mathbf{p_0}\cdot\mathbf{q_0}(x,y,z)\cdot\mathbf{q_0}\right)\mathbf{p_0}+\left(\|\mathbf{p_0}\|^2(x,y,z)\cdot\mathbf{q_0}-\mathbf{p_0}\cdot\mathbf{q_0}(x,y,z)\cdot\mathbf{p_0}\right)\mathbf{q_0}\Big)\end{aligned}\tag{34}$$

と分かる．

P を S 上に取ると $(x,y,z)=\varphi(s,t)$ と書ける．U を 1 辺 $\epsilon>0$ 以内の小矩形に分割し，そのうちの 1 つに注目して，その中に $P_0=\varphi(s_0,t_0)$ を取る．φ が C^1 級なので，平均値の定理 (テーラーの定理定理 34) から，小矩形内の 2 点 (s,t), $(s+\delta s,t+\delta t)$ に対して

$$\varphi(s+\delta s,t+\delta t)-\varphi(s,t)=\mathbf{p_0}\delta s+\mathbf{q_0}\delta t+O(\epsilon^2).\tag{35}$$

ここで剰余項 $O(\epsilon^2)$ は U 内の有界閉集合において一様に $(s_0,t_0,\delta s,\delta t$ に無関係な定数 M を用いて $O(\epsilon^2)\leqq M\epsilon^2$ に) とれる．この 2 点に対応する曲面上の点 P の正射影 Q のずれ δQ (一方を始点，他方を終点とするベクトル) は，(35), (34) より，

$$\delta Q=\delta s\,\mathbf{p_0}+\delta t\,\mathbf{q_0}+O(\epsilon^2).$$

従って，定理 48 の証明 [2, §92] と同様に，s 方向に δs， t 方向に δt の長さの矩形はベクトル $\delta s\,\mathbf{p_0}$ と $\delta t\,\mathbf{q_0}$ が作る平行四辺形に $O(\epsilon^2)$ を除いて写されるから，面積の比は $\|\mathbf{p_0}\times\mathbf{q_0}\|+O(\epsilon)$ となる．これは $\mathbb{R}^2$ の部分集合から $\mathbb{R}^2$ の部分集合への写像なので，積分変数変換の公式 (定理 48) から，S のうち， U の像になっている部分の面積は

$$\int_U\|\mathbf{p}\times\mathbf{q}\|(s,t)\,ds\,dt=\int_U\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial s}\times\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|(s,t)\,ds\,dt$$

となる．

スカラー場やベクトル場の積分も同様に考えることができる．

以上に基づいて，曲面上の積分を次のように定義する．曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ の標準の向きの単位法ベクトルを $\mathbf{n}$ とし，滑らかな境界を持つ有界閉部分集合 $E\subset S$ をとる．E 上の C^1 級スカラー場 $f\colon E\to\mathbb{R}$，と C^1 級ベクトル場 $\mathbf{V}\colon E\to\mathbb{R}^3$ に対して，以下によって積分 $\displaystyle\int_E dS$, $\displaystyle\int_E f\,dS$, $\displaystyle\int_E\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$ を定義する．

E を一つのパラメータ $\varphi:U\to E$ $(\varphi(U)=E)$ で表示できるときは，

$$\begin{aligned}\int_E dS&=\int_U\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial s}\times\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|(s,t)\,ds\,dt\\ \int_E f\,dS&=\int_U f(\varphi(s,t))\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial s}\times\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|(s,t)\,ds\,dt\\ \int_E\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS&=\int_U\mathbf{V}(\varphi(s,t))\cdot(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\times\frac{\partial\varphi}{\partial t})(s,t)\,ds\,dt.\end{aligned}\tag{36}$$

ここで，ベクトル場の積分に関しては

$$\begin{aligned}\int_E\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS&=\int_U\mathbf{V}(\varphi(s,t))\cdot\mathbf{n}(\varphi(s,t))\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial s}\times\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|(s,t)\,ds\,dt\\ &=\int_U\mathbf{V}(\varphi(s,t))\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)\right)ds\,dt.\end{aligned}$$

最後の変形で (33) を用いた．

$E=\varphi(U)$ に対して， U が有限個の，滑らかな境界を持つ有界閉集合 U_i, $i=1,\cdots,k$, の，境界以外では共通点を持たない，和集合で書けて，各 U_i 上では 1 つのパラメータ表示 φ_i を持つときは,

$$\int_E dS = \sum_{i=1}^{k} \int_{U_i} \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right\| (s,t)\, ds\, dt$$

等となる[33]. $\displaystyle\int_E f\, dS$, $\displaystyle\int_E \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$ も同様である.

$\displaystyle\int_E dS$, $\displaystyle\int_E f\, dS$, $\displaystyle\int_E \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$ を，それぞれ， E の面積，および f， $\mathbf{V}$ の E 上の面積分という.

S が閉曲面またはコンパクトな縁つきの曲面のときは $E=S$ と取ることができる.

面積分の定義として妥当であるにはパラメータの表示によらないことが言いたい.

補題 25 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ を 3 次列 *(縦)* ベクトルとし，それを並べた 3×2 行列を $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ と書く.
$A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ に対して， 3 次列ベクトル $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ を $(\mathbf{c},\mathbf{d})=(\mathbf{a},\mathbf{b})\,A$ で定義すると,

$$\mathbf{c}\times\mathbf{d} = (\det A)\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

証明.

$$\mathbf{c}\times\mathbf{d} = (\alpha\mathbf{a}+\gamma\mathbf{b})\times(\beta\mathbf{a}+\delta\mathbf{b}) = (\alpha\delta-\beta\gamma)\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\det A)\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

ここで $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0$, $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ などを使った. □

定理 26 以上の面積分は向きを保つパラメータの表示によらない.

証明. $\varphi'\colon U'\to\mathbb{R}^3$ を S の向きを保つ別の座標とする． $\phi=\varphi^{-1}\circ\varphi'\colon U\to U'$ とおくと，命題 22 と同様に，これは well-defined で，U から U' への可微分同相写像になり，$\varphi'=\varphi\circ\phi$ を満たす．積分変数変換公式定理 48 から連続関数 $g\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ に対して

$$\int_U g(\varphi(s,t))\, ds\, dt = \int_{U'} g(\varphi'(u,v))\, |\det D\phi(u,v)|\, du\, dv. \tag{37}$$

ここで $D\phi$ は $\phi=(\phi_1,\phi_2)$ のヤコビ行列

$$D\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

一方，合成関数の微分法則定理 35 から

$$\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial u},\ \frac{\partial \varphi'}{\partial v}\right)(u,v) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s},\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)(\phi(u,v))\, D\phi(u,v).$$

よって 補題 25 より

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial u}\times\frac{\partial \varphi'}{\partial v}(u,v) = \det(D\phi)(u,v)\, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\times\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)(\phi(u,v)).$$

よって，スカラー場 $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ に対して，(37) において

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}\times\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| (\varphi^{-1}(\mathbf{x})),\quad \mathbf{x}\in S,$$

とおくと,

$$\int_U f(\varphi(s,t)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}\times\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| (s,t)\, ds\, dt = \int_{U'} f(\varphi'(u,v)) \left\| \frac{\partial \varphi'}{\partial u}\times\frac{\partial \varphi'}{\partial v} \right\| (u,v)\, du\, dv$$

[33] 曲面に対して，このような分解が常に可能か，という問題に関しては，多様体論で多様体上の積分の話に譲る.

となって，この積分はパラメータによらない．面積の定義はこの式で f を恒等的に 1 という関数においたものであるから，パラメータによらない．

同様に，ベクトル場 $\mathbf{V}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ に対して，(37) において

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)(\varphi^{-1}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in S,$$

とおくと，φ, φ' が向きを保つので $\det D\phi(u,v) > 0$ であることを使うと，

$$\begin{aligned}\int_E \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \int_U \mathbf{V}(\varphi(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)(s,t)\,ds\,dt \\ &= \int_{U'} \mathbf{V}(\varphi'(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)(\phi(u,v)))\ \det D\phi(u,v)\,du\,dv \\ &= \int_{U'} \mathbf{V}(\varphi'(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi'}{\partial v}\right)(u,v)\,du\,dv,\end{aligned}$$

となって，パラメータによらない．

□

例 37 面積分の積分範囲 E が xy 平面内にあるときは，パラメータとして $(s,t) = (x,y)$, 即ち，$\varphi(s,t) = (s,t,0)$ をとることができる．$\varphi(U) = E$ とすると， $U = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid (s,t,0) \in E\}$ である．

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t} = (0,0,1)$$

なので，

$$\begin{aligned}\int_E dS &= \int_{\{(s,t)|(s,t,0)\in E\}} ds\,dt \\ \int_E f\,dS &= \int_{\{(s,t)|(s,t,0)\in E\}} f(s,t,0)\,ds\,dt \\ \int_E \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \int_{\{(s,t)|(s,t,0)\in E\}} \mathbf{V}(s,t,0)\cdot\mathbf{n}\,ds\,dt.\end{aligned}$$

これらは E の面積，および，E 上での $f(x,y,0)$, $\mathbf{V}(x,y,0)\cdot\mathbf{n}$ の重積分 §A.3.2 に他ならない．ここで，ベクトル場の法線成分の面積分において $\mathbf{n} = (0,0,1)$ とおいた．なお，面の法線方向には向きがあることに注意．実際， $\varphi(s,t) = (t,s,0)$ とすると，符号が逆転する．この場合でも， $\mathbf{n}$ を面の向きに合わせてとっておけば上記公式が成り立つ．

座標軸に平行であれば同様である．例えば， E が yz 面に平行な面 $x = a$ 内にあれば，

$$\int_E \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_{\{(s,t)|(a,s,t)\in E\}} \mathbf{V}(a,s,t)\cdot\mathbf{n}\,ds\,dt$$

などとなる．ここで $\mathbf{n}$ は $(\pm1,0,0)$ *(*複号のどちらをとるかは面の向きによる．*)*

◇

問 38 定義に基づいて，単位球面 *(*問 *31)* の面積を計算せよ．

◇

2.3 Gauss の発散定理と Green の公式．

2.3.1 Gauss の発散定理．

$\mathbb{R}^2$ における Gauss の定理 定理 18 と同様，$\mathbb{R}^3$ の中の領域とその境界についても Gauss の定理が成り立つ.（その証明も基本的に同様である.）

定理 27 (Gauss の定理) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界閉領域で，その境界 $S = \partial\Omega$ が閉曲面であるとする．ベクトル場 $\mathbf{V}\colon\ \Omega \to \mathbb{R}^2$ が C^1 級ならば,

$$\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{V}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS.$$

ここで， S の向き $\mathbf{n}$ は，領域の境界の向き，即ち， Ω の内側から外側へ向かう向きとする．また，左辺は通常の重積分 *(*§A.3.2 の 3 次元版*)*.

注 39 定理 *18* の証明，即ち，定理 *14*, *(18)*, と遡って 定理 *13* の証明と同様である．そのときの注意と同様，この講義では領域の形が都合のいい場合だけを証明する．一般の場合は領域 Ω を x, y, z 軸に平行ないくつかの面で分割して，都合のよい形に帰着させられるはずだが，ここでは証明せずに事実として認める.（分割したときに新たに生じる面からの面積分への寄与は，隣接する領域の対応する面積分で大きさが一致して法ベクトルの方向だけ逆になるので，打ち消し合う.）

Ω が次の形に書けることを仮定する．実定数 $a_1 < b_1,\ a_2 < b_2,\ a_3$ に対して

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 < x < b_1,\ a_2 < y < b_2,\ a_3 < z < f(x,y)\}.$$

但し， f は $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 < x < b_1,\ a_2 < y < b_2\}$ で定義され，(a_3, ∞) に値を取る C^∞ 級関数とする． $\diamond$

証明. $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ とおくと，注 39 の Ω に対して，逐次積分 (定理 47 の 3 次元版) から

$$\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{V}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{f(x,y)} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right)(x,y,z)\,dz. \tag{38}$$

他方，不定積分の微分公式定理 43 と積分下のパラメータ微分の公式定理 44 から

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{a_3}^{f(x,y)} V_1\,dz = \int_{a_3}^{f(x,y)} \frac{\partial V_1}{\partial x}(x,y,z)\,dz + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,V_1(x,y,f(x,y)).$$

V_2 についても同様の関係が成り立つ．これらを (38) に代入し，微積分学の基本公式命題 42 を用いれば,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{V}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\
&\quad = -\int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{f(a_1,y)} dz\,V_1(a_1,y,z) + \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{f(b_1,y)} dz\,V_1(b_1,y,z) \\
&\qquad - \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_3}^{f(x,a_2)} dz\,V_2(x,a_2,z) + \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_3}^{f(x,b_2)} dz\,V_2(x,b_2,z) - \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy\,V_3(x,y,a_3) \\
&\qquad + \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \left(-V_1(x,y,f(x,y))\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - V_2(x,y,f(x,y))\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + V_3(x,y,f(x,y))\right)
\end{aligned} \tag{39}$$

を得る[34].

一方，注 39 の Ω に対して，その境界 $\partial\Omega$ は次の 6 個の部分よりなる：

$$\partial\Omega = \partial_{x,-}\Omega \cup \partial_{x,+}\Omega \cup \partial_{y,-}\Omega \cup \partial_{y,+}\Omega \cup \partial_{z,-}\Omega \cup \partial_{z,+}\Omega.$$

ここで，各部分とそこでの法単位ベクトル（領域から外向き） $\mathbf{n}$ は,

$$\begin{aligned}
&\partial_{x,-}\Omega = \{(a_1,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_2 < y < b_2,\ a_3 < z < f(a_1,y)\}, && \mathbf{n} = (-1,0,0), \\
&\partial_{x,+}\Omega = \{(b_1,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_2 < y < b_2,\ a_3 < z < f(b_1,y)\}, && \mathbf{n} = (1,0,0), \\
&\partial_{y,-}\Omega = \{(x,a_2,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 < x < b_1,\ a_3 < z < f(x,a_2)\}, && \mathbf{n} = (0,-1,0), \\
&\partial_{y,+}\Omega = \{(x,b_2,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 < x < b_1,\ a_3 < z < f(x,b_2)\}, && \mathbf{n} = (0,1,0), \\
&\partial_{z,-}\Omega = \{(x,y,a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 < x < b_1,\ a_2 < y < b_2\}, && \mathbf{n} = (0,0,-1), \\
&\partial_{z,+}\Omega = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 < x < b_1,\ a_2 < y < b_2\}, && \mathbf{n} = \frac{\left(-\dfrac{\partial f}{\partial x}, -\dfrac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\left\|\left(-\dfrac{\partial f}{\partial x}, -\dfrac{\partial f}{\partial y}, 1\right)\right\|}.
\end{aligned}$$

---

[34] [5, §2.3(b)] の式 (2.6) の次の次の式と (2.7) は積分の上限に $f(x,y)$ とあるのは間違い.

($\partial_{z,+}\Omega$ 以外では $\mathbf{n}$ は定ベクトル．$\partial_{z,+}\Omega$ については 命題 21 において，$s=x, t=y, \varphi(x,y)=(x,y,f(x,y))$ とおいた．)

以上を見比べると，例 37 より，(39) の各項は，最後の積分を除いて順に，$\displaystyle\int_{\partial_{x,-}\Omega}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$, $\displaystyle\int_{\partial_{x,+}\Omega}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$, $\displaystyle\int_{\partial_{y,-}\Omega}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$, $\displaystyle\int_{\partial_{y,+}\Omega}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$, $\displaystyle\int_{\partial_{z,-}\Omega}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$, に等しいことが分かる．(39) の最後の積分については，面積分の定義 (36) において $\varphi(s,t)=(s,t,f(s,t))$ で $\partial_{z,+}\Omega$ を表示すると，

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\times\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)(s,t)=\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)(s,t)$$

なので

$$\int_{\partial_{z,+}\Omega}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS=\int_{\{(s,t)\in\mathbb{R}^2|a_1<s<b_1,\ a_2<t<b_2\}}\mathbf{V}(s,t)\cdot\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)(s,t)\,ds\,dt$$

となって，(39) の最後の積分と一致する．よって，(39) の最後の積分は $\displaystyle\int_{\partial_{z,+}\Omega}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$ に等しい．以上により，

$$\int_{\Omega}\mathrm{div}\,\mathbf{V}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_{\partial\Omega}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$$

が証明された．

□

問 40 *(1)* $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2<1\}$，$S=\partial\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$，とし，$\mathbf{V}:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を $\mathbf{V}(x,y,z)=(x,y,z)$ で定義する．
このとき，$\displaystyle\int_{\Omega}\mathrm{div}\,\mathbf{V}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ および $\displaystyle\int_S\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$ をそれぞれ定義に基づいて計算せよ．それによって定理 *27* が成り立っていることを確かめよ．

(2) $\mathbf{V}:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を $\mathbf{V}(x,y,z)=\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}(x,y,z)$ で定義する．但し，$\alpha>0$ は定数とする．
このとき，原点がその内部にあるような閉曲面 S に対して $\displaystyle\int_S\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$ を求めよ．
（ヒント．S の形が規則的とすら分からないので定義から計算するのは適当ではない．そこで 定理 *27* を用いて計算するが，原点でベクトル場は C^1 級でないから，このままでは体積積分は原点付近で計算できない．これを解決するために，原点を中心とし S の内部に含まれるように半径 $\epsilon>0$ の球面 S_ϵ をとり，S と S_ϵ で囲まれる領域を Ω として定理 *27* を使う．S_ϵ における面積分は球面なので，定義に基づいて計算できる.）

◇

2.3.2 Green の公式．

定理 28 (Green の公式) $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ を滑らかな境界 $S=\partial\Omega$ を持つ有界閉領域，$f:\ \Omega\to\mathbb{R}$, $g:\ \Omega\to\mathbb{R}$, を C^2 級スカラー場とすると，

$$\int_{\Omega}(g\,\Delta f-f\,\Delta g)\,dx\,dy\,dz=\int_S(g\ \mathrm{grad}\,f-f\ \mathrm{grad}\,g)\cdot\mathbf{n}dS$$

ここで Δ は 3 次元ラプラス作用素 *(*問 *29)* $\Delta=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$．

証明. $\mathrm{div}(f\,\mathbf{V})=\mathrm{grad}\cdot\mathbf{V}+f\ \mathrm{div}\,\mathbf{V}$, $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,f=\Delta f$ (問 29) とガウスの定理 (定理 27) から，

$$\int_S(g\ \mathrm{grad}\,f-f\ \mathrm{grad}\,g)\cdot\mathbf{n}dS=\int_{\Omega}\mathrm{div}(g\ \mathrm{grad}\,f-f\ \mathrm{grad}\,g)(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_{\Omega}(g\,\Delta f-f\,\Delta g)\,dx\,dy\,dz.$$

□

2.4 Stokes の定理.

Gauss の定理と同様，Stokes の定理 (定理 14) も $\mathbb{R}^3$ に拡張できる．但し，Gauss の定理の場合は積分の次元が上がる拡張だが，ここでいう Stokes の定理の拡張は，面積分をその境界線積分で表すことは変えずに，面を $\mathbb{R}^3$ の縁付き曲面の場合 (例 32) に拡張する．(従って，$\mathbb{R}^2$ では Gauss の定理と Stokes の定理はベクトルポテンシャルの線積分において法線成分か接線成分かの違いしかなく，証明も一方から他方が自動的だったが， $\mathbb{R}^3$ では両者には若干の内容の違いがある.)

2.4.1 Stokes の定理.

$\mathbb{R}^3$ の Stokes の定理を述べるには空間曲線の定義が必要だが，これは平面上の曲線 (§1.2.1) と全く同様で，単にパラメータ表示の値域が $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ に変わるだけで，閉区間 $[a,b]$ から $\mathbb{R}^3$ への (区分的に)1 : 1 で滑らかな (C^1 級で微分が各点で $\varphi'(t) \neq (0,0,0)$ を満たす) 関数のことを空間曲線という．曲線の長さ (§1.2.2)，スカラー場の線積分 (§1.2.3)，ベクトル場の (接線成分の) 線積分 (§1.2.5)，は全て $\mathbb{R}^2$ 内の曲線のときと同様に定義される．接ベクトル (§1.4.1) も同様に，$\mathbf{v} = c\dfrac{d\,\mathbf{u}}{dt}(t_0)$ なる実数 $c \neq 0$ が存在することで定義する．法ベクトルも同様に，$\mathbf{v} \cdot \dfrac{d\,\mathbf{u}}{dt}(t_0) = 0$ を満たすことで定義するが，$\mathbb{R}^2$ のときと違って，このようなベクトルは一次独立なものが 2 つとれる．即ちある点での法ベクトルの集合は 2 次元ベクトル空間をなす．接ベクトルの向きによって曲線の向きが定義できることも同様である．

境界付き曲面 S の向き (即ち単位法ベクトル $\mathbf{n_2}$ (連続関数) の各点での向き) を与えたとき，境界 ∂S の向きを次のように定める．$P \in \partial S$ とし $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ を P の近傍での S のパラメータ表示とする． $P \in \partial S$ なので U は半円であり， $\varphi(p) = P$ なる p は半円の直径部分に乗っている．よって U の p における外向き法ベクトル $\mathbf{n_p}$ が定まるので，$n_1(P) = (D\varphi)(\mathbf{n_p})$ とおく．そこで， P における ∂S の単位接ベクトル (前後ろ 2 方向可能だが) $\mathbf{t}$ の向きを， $\mathbf{t} = C\mathbf{n_2}(P) \times \mathbf{n_1}(P)$ なる $C > 0$ の存在する方向，即ち， $\mathbf{n_2}, \mathbf{n_1}$, $\mathbf{t}$ が右手系を作る ($\mathbf{n_2}$ から $\mathbf{n_1}$ に向かって右ねじを回すときねじの進む方向が $\mathbf{t}$) ように定める．

定理 29 (Stokes の定理) S を向きの付いたコンパクトな境界付き曲面， $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を C^1 級ベクトル場とする．このとき，

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\partial S} \mathbf{V}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u}.$$

曲面の境界に関する積分路は上で定義した標準的な向きとする．

従って，特に，ベクトル場の回転の面積分 $\displaystyle\int_S \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS$ は S の境界 ∂S が同じならば S によらない *(S の縁以外のところを変形しても問題の積分は不変である)*．さらに $\partial S = \emptyset$，即ち， S が閉曲面ならば $\displaystyle\int_S \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$ である．

注 41 $\mathbf{V}$ は $\mathbb{R}^3$ 全体で定義されている必要はなく，S の近傍で定義されていれば十分である．(実際， S と ∂S での微積分しか出てこないのだから，当然のことではあるが， S が閉曲面で，その内部に $\mathbf{V}$ の微分不可能な点があっても定理 *29* は成り立つことはあとで使うので注意.) ◇

証明. いつものように必要なら曲面を分割することで対処できることを認めて，一つのパラメータ $\varphi\colon U \to S$ ($\varphi(U) = S$) で曲面が覆われている場合のみを証明する．$D\varphi_1 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial s}$, $D\varphi_2 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$，即ち，$D\varphi$ の 1, 2 列目の列ベクトルをそれぞれ $D\varphi_1$, $D\varphi_2$， とすると，面積分の定義 (36) より，

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_U (\operatorname{rot} \mathbf{V}(\varphi(s,t))) \cdot (D\varphi_1 \times D\varphi_2)(s,t)\, ds\, dt. \tag{40}$$

他方，U の境界 ∂U のパラメータ表示 $m\colon\ [0,1] \to \partial U$ をとる ($m(1) = m(0)$) と，$\ell(t) = \varphi(m(t))$, $t \in [0,1]$, は ∂S のパラメータ表示になる．縁付き曲面の境界 ∂S の向きの定義から，m が ∂U の向きを保つならば， ℓ は ∂S の向きを保つ．このとき，

$$\int_{\partial S} \mathbf{V}(\ell) \cdot d\ell = \int_0^1 \mathbf{V}(\ell(t)) \cdot \frac{d\,\ell}{dt}(t)\, dt = \int_0^1 (\mathbf{V}(\ell(t)) D\varphi(m(t)))\, \frac{d\,m}{dt}(t)\, dt.$$

ここで， $\mathbf{V}$ を 1×3， $D\varphi$ を 3×2， m を 2×1 行列として，行列の積をとっている．最後の表式は $\mathbb{R}^2$ の曲線に沿った線積分である (定理 5)．よって 2 次元の Green の定理 定理 14 から

$$\int_{\partial S}\mathbf{V}(\ell)\cdot d\ell=\int_{\partial U}(\mathbf{V}(\ell(t))D\varphi(m(t)))\cdot d\mathbf{m}=\int_U \mathrm{rot}(\mathbf{V}(\varphi(s,t))D\varphi(s,t))\,ds\,dt. \tag{41}$$

この式の rot は (19) で定義された 2 次元の rot：$\mathrm{rot}\,\mathbf{V}=\dfrac{\partial V_2}{\partial x}-\dfrac{\partial V_1}{\partial y}$．従って， $\mathbf{V}=(V_1,V_2,V_3)$, $D\varphi_1=(D\varphi_{11},D\varphi_{12},D\varphi_{13})$ とおくと，合成関数の微分法則 (定理 35 の 3 変数版) から (以下，見やすくするため変数 (s,t) を省略する)，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}((\mathbf{V}\circ\varphi)\,D\varphi)\\
&\qquad=\frac{\partial}{\partial s}((\mathbf{V}\circ\varphi)\cdot D\varphi_2)-\frac{\partial}{\partial t}((\mathbf{V}\circ\varphi)\cdot D\varphi_1)\\
&\qquad=\sum_{j=1}^{3}(D\varphi_1)\cdot((\mathrm{grad}\,V_j)\circ\varphi)\,(D\varphi_{2j})-\sum_{j=1}^{3}(D\varphi_2)\cdot((\mathrm{grad}\,V_j)\circ\varphi)\,(D\varphi_{1j})\\
&\qquad=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_k}\right)\circ\varphi\,(D\varphi_{1k}\,D\varphi_{2j}-D\varphi_{2k}\,D\varphi_{1j})\\
&\qquad=\sum_{(j,k);\ 1\leqq j<k\leqq 3}\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_j}-\frac{\partial V_j}{\partial x_k}\right)\circ\varphi\,(D\varphi_{1j}\,D\varphi_{2k}-D\varphi_{2j}\,D\varphi_{1k})\\
&\qquad(\mathrm{rot}\,\mathbf{V})\circ\varphi\cdot(D\varphi_1\times D\varphi_2).
\end{aligned}$$

よって，(40) と (41) は等しい．

□

2.4.2 勾配ベクトル場の特徴づけ (ベクトル場がスカラーポテンシャルを持つ条件)．

3 次元の Stokes の定理 (定理 29) は 2 次元の Green の定理 (定理 14) を，平面曲線 (曲面) から空間曲線 (曲面) にそのまま拡張したので，定理 14 の帰結はそのまま定理 29 によって 3 次元空間に拡張されるはずである．

領域の単連結性を必要としない定理 10 (§1.3.2) と単連結性が本質的な定理 15 (§1.4.5) を合わせて拡張した定理を紹介する．

$\mathbb{R}^2$ の領域の単連結性は §1.4.2 で定義したが，$\mathbb{R}^3$ の領域の単連結性が必要である．$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ が単連結とは Ω に含まれる任意の閉曲線 C に対して Ω に含まれる向きの付いた境界付き曲面 S で $\partial S=C$ となるものがあるときをいう[35]．

定理 30 領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ で定義された C^1 級ベクトル場 $\mathbf{V}$ について，次の 3 つの条件は同値である．

(1) Ω に含まれる任意の閉曲線 C に対して $\displaystyle\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}=0$．

(2) Ω に含まれる任意の曲線 C に沿った $\mathbf{V}$ の線積分 $\displaystyle\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}$ は C の両端のみで決まり途中の曲線によらない．

(3) C^2 級スカラー場 $f:\ \Omega\to\mathbb{R}$ が存在して $\mathbf{V}=\mathrm{grad}\,f$ が Ω 上で成り立つ．即ち， $\mathbf{V}$ は勾配ベクトル場である．
さらにこのとき，$a\in\Omega$ から $b\in\Omega$ への曲線 C に対して $\displaystyle\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}=f(b)-f(a)$.

さらに次が成り立つ．

(1) 上の条件のいずれか *(*従って全て*)* が成り立つならば，$\mathrm{rot}\,\mathbf{V}=0$ が Ω 上で成り立つ．

---

[35] この定義もプロの本来の単連結の定義は違うらしい．但し，$\mathbb{R}^3$ ではこの定義で同値とのこと [5, 注 2.44].

(2) さらに，Ω が単連結ならば，逆も成り立つ，即ち，$\mathrm{rot}\,\mathbf{V}=0$ が Ω 上で成り立てば，Ω に含まれる任意の閉曲線 C に対して $\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}=0$.

証明. 最初の 3 条件の同値性は 2 次元の場合 (§1.3.2) と同様．$\mathbf{V}=\mathrm{grad}\,f$ と書けていれば，問 29 から $\mathrm{rot}\,\mathbf{V}=\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,f=0$ となる．

最後に，Ω が単連結で $\mathrm{rot}\,\mathbf{V}=0$ が Ω 上で成り立つとする．仮定から Ω の任意の閉曲線 C に対して $\partial S=C$ となる境界付き曲面 S が Ω の中にとれる．このとき Stokes の定理 (定理 29) から

$$\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}=\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS=0\,.$$

□

2 次元のとき (定理 15) と同様に，$\mathrm{rot}\,\mathbf{V}=0$ から $\mathbf{V}$ が勾配ベクトル場であることが言えるためには単連結という仮定は本質的である．

例 42 $\Omega=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$ なる *(*連結だが単連結ではない*)* 領域において，$\mathbf{V}(x,y,z)=\dfrac{(-y,x,0)}{x^2+y^2}$, $(x,y,z)\in\Omega$, で定義されるベクトル場は，Ω の各点で $\mathrm{rot}\,\mathbf{V}=0$ を満たすが，C が xy 面内の原点を中心とする単位円 $\{(x,y,0)\mid x^2+y^2=1\}$ を反時計回りするとき，

$$\int_C \mathbf{V}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}=\int_0^{2\pi}(-\sin\theta,\cos\theta,0)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta,0)\,d\theta=2\pi$$

となって，0 にならない．

◇

2.4.3 ベクトル場がベクトルポテンシャルを持つ条件について．

領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ の境界 $\partial\Omega$ が弧状連結とする (即ち内部に穴が空いていない，ということ)．Ω 内のコンパクトな滑らかな縁の付いた曲面 S に対して，その境界 ∂S と同じ境界を持つコンパクト縁付き曲面 S' を考える ($\partial S'=\partial S$)．S と S' を合わせた曲面 $S\cup S'$ は境界を持たないので閉曲面になる．この閉曲面は ∂S のところで滑らかでないかも知れないが，滑らかな有界曲線は面積も体積も 0 だから，Gauss の定理は成り立つ．曲面の向きは，§2.4.1 で定義した境界曲線の向きが ∂S と $\partial S'$ で逆向きになるように張り合わせると，曲面の向きは S も S' も $S\cup S'$ の内部から外部に向かうようになる．また，境界曲線上の線積分は ∂S と $\partial S'$ でうち消す.（S と S' が途中で交差すると内部が怪しくなるが，ここでは $S\cap S'=\partial S=\partial S'$ となるようなものだけ考えれば十分.）

さて，Ω 上で定義されたベクトル場 $\mathbf{V}:\ \Omega\to\mathbb{R}^3$ が，もし，

$$\mathrm{div}\,\mathbf{V}=0,\quad \text{on}\ \ \Omega, \tag{42}$$

を満たすならば，Gauss の定理定理 27 から，上記の S, S' に対して $\int_{S\cup S'}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS=0$ を得るので

$$\int_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS=\int_{S'}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS, \tag{43}$$

即ち，境界が同じならば積分する曲面によらない．

もし $\mathbf{V}$ が，(C^2 級) ベクトル場 $\mathbf{A}:\ \Omega\to\mathbb{R}^3$ を用いて

$$\mathbf{V}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A},\quad \text{on}\ \Omega, \tag{44}$$

と書けているならば，$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}=0$ (問 29) から (42) が成り立ち，従って，(43) が成り立つ．または，定理 29 からも直接導ける．(44) が成り立つとき $\mathbf{A}$ を $\mathbf{V}$ のベクトルポテンシャルという．

実はこの逆も成り立つ．

定理 31 (deRham の定理) 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ の境界 $\partial\Omega$ が弧状連結とし， Ω で定義された C^1 級ベクトル場 $\mathbf{V}$ が *(42)* を満たすならば，$\mathbf{V}$ のベクトルポテンシャルが存在する．即ち，C^2 級ベクトル場 $\mathbf{A}:\ \Omega \to \mathbb{R}^3$ が存在して，*(44)* が成り立つ．

この講義では，この定理に立ち入ることはしない[36]が，スカラーポテンシャルの存在条件 (§1.4.5, §2.4.2) のアナロジーであることは見て取れる．そこでも注意したように，ベクトル場が $\partial\Omega$ が弧状連結な領域 Ω で定義されていることは重要である．

例 43 $\mathbf{V}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}(x,y,z)$ とおくと，$\mathbf{V}$ は $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ で定義されている．

このとき， xy 面内の閉曲線 $C = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2=1\}$ を境界に持つ 2 つの曲面 $S_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 1,\ z \geqq 0\}$, $S_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 1,\ z \leqq 0\}$, について面積分

$$\int_{S_i} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS, \quad i=1,2,$$

を考えると，もし， $\mathbf{V}$ が $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ でベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を持つならば,

$$\int_{S_i} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_{S_i} \mathrm{rot}\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

なので，定理 *29* より $i=1,2$ とも，同じ値

$$\int_C \mathbf{A}(\mathbf{u})\cdot d\mathbf{u}$$

でなければならない．ここで， C の向きは，例えば， xy 面内で z の正の側から見下ろしたとき反時計回りと決めておく．このとき，S_1 上で $\mathbf{n}(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$S_2$ 上で $\mathbf{n}(x,y,z) = -\dfrac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$．（つまり，どちらも z 軸の正方向を向いている．）よって，定義に従って計算すると

$$\int_{S_1} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS = 2\pi, \quad \int_{S_2} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS = -2\pi.$$

面によって値が違うので矛盾．よって， $\mathbf{V}$ は $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ で $\mathrm{div}\,\mathbf{V}=0$ を満たすにも関わらず，そこでベクトルポテンシャルを持たない．

◇

ベクトルポテンシャルの任意性について指摘しておく．$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,f = 0$ (問 29) なので，$\mathbf{A}$ が $\mathbf{V}$ のベクトルポテンシャルで φ がスカラー場ならば， $\mathbf{A} + \mathrm{grad}\,\varphi$ も (44) を満たす．即ち，ベクトルポテンシャルである．このように，ベクトルポテンシャルには勾配ベクトルの任意性がある．定理 31 を泥臭く証明すると，この任意性の中で，$\mathrm{div}\,\mathbf{A}=0$ を満たす $\mathbf{A}$ を見つけるのが見通しがよいだろう．

3 理論物理学への応用．

3.1 ニュートン力学におけるエネルギー保存則と grad．

現実の世界は，人間に素朴に見える範囲は，空間 $\mathbf{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ と時間 $t \in \mathbb{R}$ で指定される．即ち，全ての物理量はこれらの関数で書ける (もちろん，これらのうちのいくつかによらない場合もある)．即ち，物理学では断らなければ，$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ の空間において考える[37]．

地上で通常肉眼で見る程度の大きさの塊の目に見える程度の速さの運動から天体 (惑星) の運動程度までの大きさと速さの運動では，ニュートンの運動方程式がよい記述になっている (ニュートンの運動方程式を解いて得られた結果を現実の現象に翻訳したものと，実験や観測事実が測定器の誤差の範囲内で一致する) ことが知られている[38]

[36] Poisson 方程式への言及が必要だと思う．

[37] 20 世紀の終盤に，断らなければ $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^{10}$ などを考えるかのような分野も見受けられたが，これは研究の都合でそういう空間が重要であるかのようなふりをしているだけなので，現実の空間が 20 世紀の終わりに変化したと思っているのではない．

[38] もっと大きいものやもっと小さいもの，速いものや強い力でも大丈夫だが，それぞれあまり極端になると，不正確になる．

点 (粒子) とみなしてよいほど小さい物体 (塊や天体[39]の運動とは，その時刻ごとの位置 $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$，即ち，(時間をパラメータとみたときの) 空間曲線のことである．ニュートン力学の主張は，この空間曲線がニュートンの運動方程式に従うということである．各時刻に質点に働く力 $\mathbf{F}$ が質点 (物体) の位置 $\mathbf{x}$ だけで決まる場合（例えば重力だけで運動が決まる場合など），即ち， $\mathbf{F}$ が空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\mathbf{F} :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ であるときには，ニュートンの運動方程式は

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}(t), \quad t \geqq 0, \tag{45}$$

である．ここで $m > 0$ は定数 (物体の質量)．この微分方程式を初期条件 $\mathbf{x}(0), \dfrac{d\mathbf{x}}{dt}(0)$ を与えて解けば質点の運動が決まる．力 $\mathbf{F}$ はその質点が置かれている状況で決まる．

この方程式を解く上で (数学的にも物理学的にも) 非常に有効な概念として，仕事とエネルギーというものがある．これを説明するために，以下， $\mathbf{F}$ は C^1 級， $\mathbf{x}$ は C^2 級であると仮定し，さらに，どんな初期条件の下でも有限時間内には $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}(0) = 0$ (質点が停止すること) は高々有限回しか起きないとする（つまり， $\mathbf{F}$ はそのような都合のよい場であるという仮定[40]）．そして，

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \tag{46}$$

を仮定する．

(45) の両辺の $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}(t)$ との内積をとって，$t \in [a, b]$ で積分してみると，

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)\, dt = \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}\left\|\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)\right\|^2 dt = K(b) - K(a) \tag{47}$$

となる．ここで，

$$K(t) = \frac{m}{2}\left\|\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)\right\|^2, \quad t \geqq 0, \tag{48}$$

とおき，微積分学の基本公式 命題 42 を用いた．他方，左辺は，t をパラメータと見たとき，区分的に $1:1$ で滑らかな空間曲線 $x(t)$, $t \in [a, b]$, 上の積分 (§2.4.1, §1.2.5) である．従って，定理 5 を ($\mathbb{R}^3$ に拡張したもの) から，

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)\, dt = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u} \tag{49}$$

となる．ここで C は $\mathbf{x}(t)$, $t \in [a, b]$, でパラメータ表示された曲線．特に，始点が $\mathbf{x}(b)$ 終点が $\mathbf{x}(a)$ である．

右辺は $\mathbf{x}$ という具体的なパラメータ表示によらないことに注意．この右辺のことを，(曲線 C に沿って質点が移動したときの) 力 $\mathbf{F}$ が質点にする仕事，という．

次に，力 $\mathbf{F}$ に対する仮定 (46) を用いると，定理 30 より，スカラー場 $V :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ が存在して，

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad} V(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \tag{50}$$

が成り立つ[41]から，(49) と 定理 30 から

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)\, dt = -V(\mathbf{x}(b)) + V(\mathbf{x}(a)).$$

これを (47) と合わせると最終的に，

$$K(b) + V(\mathbf{x}(b)) = K(a) + V(\mathbf{x}(a)), \quad a, b \geqq 0, \tag{51}$$

[39]観測される天体は通常は巨大だが，問題にしている運動の典型的な大きさに比べて十分小さければ点とみなす．このようにして点とみなした対象を質点という．

[40]$\mathbf{x}$ は微分方程式 (45) の解である．それがこのような性質を持つかどうかは， $\mathbf{F}$ の性質から決まるはずのことで，それを $\mathbf{F}$ の性質に帰着させないと，ここの議論は数学的に閉じたとは言えない．これは常微分方程式の議論が必要であるが，それは他の講義に任せる．

[41]負号は，物理学上の習慣によってつける．

を得る．即ち，質点の運動 (曲線であって，時間パラメータで表示したとき (45) を満たすもの) $\mathbf{x}(t)$ が与えられたとき，

$$E = K(t) + V(\mathbf{x}(t)) = \frac{m}{2}\left\|\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)\right\|^2 + V(\mathbf{x}(t)) \tag{52}$$

は時間によらない定数である (即ち時刻 0 の位置と速度だけできまってしまう)．この事実をエネルギー保存法則と呼ぶ．$K(t)$ を運動エネルギー，$V(\mathbf{x}(t))$ をポテンシャルエネルギー，E を (全) エネルギーという．運動エネルギーは質点の速さだけ，ポテンシャルエネルギーは質点の位置だけで決まる．

(45) は数学上の恒等式ではない．この方程式の解は実験によって現実の質点の運動をよく記述することが知られている，という経験則である．他方，力 $\mathbf{F}$ に対する (46) などの仮定は，数学上の仮定なので，結果を現実に適用するときは，これらが満たされていることを確認する必要がある．しかし，それ以外は全て数学的な演繹 (証明) による変形なので，数学的に言えば (45) と (46) などの仮定が満たされればエネルギー保存則が成り立つ，と言ってよいし，物理学的には，質点に働く力が (46) などの仮定を満たせば (52) の形のエネルギー保存則が成り立つ，と言ってもよい．

3.2 流体力学における質量保存の法則と div．

水や空気のように自由に変形する物質の流れは流体力学と呼ばれる物理の分野で研究される．

扱う対象が，粒子 (質点) と違って空間に広がっている．これは，水や空気の粒子 (分子) が極めて多数個集まって広がっている．これを多数個の粒子に対するニュートンの運動方程式 (45) によって理解するのははなはだ非現実的である[42]．むしろ，粒子が極めて多くなった極限として理解したほうがより現実を能率よく記述できることが知られている[43]．粒子数の大きくする極限は，時空の各点 $(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ 毎に流体の密度 (その点の微小近傍での単位体積あたりの粒子数の極限) $\rho(t,\mathbf{x})$ とその点での流体の速度 (その点の微小近傍での粒子の平均速度の極限) $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ が存在するように取る．そこでこれらの変数についての (偏) 微分方程式が系を決める運動方程式になる．

系が複雑なので (45) のように万能の運動方程式はなく，扱う対象によって異なる方程式を考える必要がある．水や空気に関わる日常の (速過ぎもせず遅過ぎもしない) 現象の予測（たとえば天気予報）はナビエストークス方程式と呼ばれる偏微分方程式でよく記述できることが経験的に分かっている．その具体形等についてはこの講義では触れない．

これとは別に，質点の運動では自明であった方程式がよぶんに加わる．この由来は，1 つの粒子に注目せず，密度 ρ で記述することにしたので，ある領域での流体の量の増加はそこに流入した量に等しいという条件を課す必要が生じることである．その具体的な形は，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(t,\mathbf{x}) + \mathrm{div}(\rho\,\mathbf{v})(t,\mathbf{x}) = 0 \tag{53}$$

である．これは，運動方程式が何であっても，流体を ρ と $\mathbf{v}$ で記述する限り，必ず成り立つ．ここでは，Gauss の定理定理 27 の応用として (53) を積分形に直してみる．

$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ を有界閉領域で，その境界 $S=\partial\Omega$ が閉曲面であるとする．ρ, $\mathbf{v}$ は $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ で C^1 級とする．各 t 毎に (53) を $\mathbf{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ について Ω で積分する．次に，t 微分について，パラメータ微分と積分の順序交換定理 (1 次元積分の場合の定理 44 を重積分に拡張したもの) を適用し，$\mathrm{div}\,\mathbf{v}$ の積分について定理 27 を適用すると，

$$-\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho(t,x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_S (\rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})(t,x,y,z)dS, \quad (t,x,y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3, \tag{54}$$

を得る．ここで $\mathbf{n}$ は Ω の内側から外側へ向かう S の法単位ベクトルである．

(54) は次のように解釈できる．左辺は領域 Ω 内の流体の総量 (粒子数または質量) の単位時間当たりの減少量である．右辺の被積分関数は $S=\partial\Omega$ の各点での流体 (粒子) の速度（単位時間当たり進む距離と方向

[42] そういう「理解」でよいなら，現実の世界に方程式を解いてもらえば (つまり人間は研究などせずにだまって現実に起きることを見ていれば) いい，というのは物理学者の間では当たり前すぎて冗談にもならない．

[43] もちろん，単に粒子数が極めて多いから，という理由だけではこうはならない．運動方程式が連立多元になったときの振る舞いや，運動方程式に現れる力についての性質に，条件があるはずである．その条件を数学的に究めるのはこれまでのところ極めて難しいようである．

を合わせたベクトル）の法線成分に密度をかけているから，単位時間当たり S から外に出る流体の総量である．両者が等しいということは，ある領域から失われる (または，負符号ならば増加する) 流体は，全て，その領域の表面を通して失われる (または，流入する) ことを主張している．

実は，物理学としては議論は逆の順序である．観測や実験によればテレポーション[44]は存在しない．この経験事実を流体の場合に数学的に表現したものとして方程式 (54) が成り立つことが主張され，それを Gauss の定理 (これは微積分学の定理から証明できる恒等式) を通じて，偏微分方程式に帰着させたものが (53) である．即ち， (53) は,「この方程式を (ナビエストークス方程式などと連立させて) 解けば，世の中のある現象を数式の上で再現できる」ということを主張している物理法則であって，数学の公理から演繹される恒等式 (定理) ではない．

3.3 電磁気学におけるマックスウェル方程式と rot．

電磁気に関わる現象は日常の大きさではマックスウェルの方程式で観測事実 (実験事実) をよく記述できることが経験的に分かっている．電磁気に関わる現象は，電場 $\mathbf{E}:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ と磁場 $\mathbf{B}:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ と呼ばれる，空間 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ と時間 $t \in \mathbb{R}$ の直積空間 $\mathbb{R}^4$ 上の 3 次元ベクトル場によって記述される．

マックスウェルの方程式とは，次の 4 つの連立ベクトル微分方程式である．真空中の電磁気に関するあまり小さくないサイズの現象はこの方程式で記述される．(原子くらいに小さくなると，量子力学にしないといけない.)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{55}$$

ここで， ϵ_0, μ_0 は定数で，種々の量を国際的な約束で決まっている単位 (MKSA) で計るときの係数をこのように書く習慣である．c も定数で，定義は $c^2 = (\epsilon_0\mu_0)^{-1}$．この値は真空中の電磁波 (光) の速さである．

$\rho:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ と $\mathbf{j}:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ はそれぞれ，電荷分布と電流分布を表す関数．これらは，電荷や電流を伝える粒子 (日常生活では主に電子) の運動方程式 (45) を通して，電場と磁場を含む偏微分方程式 (具体的な実験や観測対象の状況によって境界条件を含めて変わる) に従う．電場と磁場の関与は，(45) の力 $\mathbf{F}$ が電荷 q の粒子に対して，

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_o} + q\mathbf{E} + q\frac{d\,\mathbf{x}}{dt}\times\mathbf{B} \tag{56}$$

($\mathbf{F_o}$ は， $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ を含まない項) で与えられる．

電荷や電流の項の具体的内容，特に，(56) から $\rho, \mathbf{j}$ の従う方程式を導出すること，は物理学の問題の詳細なので，ここでは扱わない．しかし (55) から

$$\frac{\partial\,\rho}{\partial t} = \epsilon_0 \operatorname{div}\frac{\partial\,E}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{j} \tag{57}$$

を必要条件として得る．ここで， $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{B} = 0$ (問 29) を用い，また場の十分な滑らかさ (例えば，4 変数関数として C^2 級) を仮定した．この必要条件を電荷保存法則という．(質量保存則 (53) との類似に注目していただきたい．)

具体例や物理の詳細に立ち入らない一般論がもう一点ある．$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ と定理 31 から

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} \tag{58}$$

を満たすベクトル場，即ち，電磁場のベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ が存在する．さらにこれを (55) に代入すると，

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E} + \frac{\partial\,\mathbf{A}}{\partial t}) = 0$$

[44]瞬間的に (0 秒で) 離れた場所に (0 でない距離) ものが移動するという仮想的な現象．

となるので，定理 30 から，電磁場のスカラーポテンシャル，即ち，

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{59}$$

を満たすスカラー場 φ が存在する．

§2.4.3 で指摘したように，ポテンシャルには任意性がある．即ち，(58), (59) を満たす $\mathbf{A}, \varphi$ と $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ に対して，$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f$ と $\varphi' = \varphi - \dfrac{\partial f}{\partial t}$ で与えられるベクトル場 $\mathbf{A}'$ とスカラー場 φ' も与えられた電磁場 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ のベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャル (即ち，(58), (59) を満たす) である．ここで，$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$ (問 29) を用いた．この任意性，あるいはこの f，をゲージ変換という．ゲージ変換を利用して，電磁場のポテンシャルとして (その時々に応じて) 扱いやすい条件を満たすものを選ぶことがしばしば行われる．このことをゲージを選ぶという．よく用いられるゲージにローレンツゲージがある．これは，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c^2 \operatorname{div}\mathbf{A} = 0 \tag{60}$$

を満たすような電磁場のポテンシャルを選ぶことをいう．ローレンツゲージ (60) をとるとき，(55) の残りの式と $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$ (問 29) から，ポテンシャルに対する次の方程式を得る．

$$\begin{aligned} \Box\varphi &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \\ \Box\mathbf{A} &= \mu_0 \mathbf{j}. \end{aligned} \tag{61}$$

ここで $\Box = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ は，ダランベール作用素と呼ばれることもある作用素．いま，((58), (59), (60) の下で) (55) から (61) を導いたが，逆に，(61) から (55) も容易に導かれる．この意味で両者は同値な偏微分方程式系である[45]

(61) の単純な応用として，真空 ($\mathbb{R}^4$ で $\rho = 0, \mathbf{j} = \mathbf{0}$) での特解を与える．$\mathbf{v}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ を 3 次元定ベクトルとし，$w = c\,\|\mathbf{k}\|$ とおくとき，

$$\begin{aligned} &\varphi(t,\mathbf{x}) = c\,\|k\| \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - wt), \\ &\mathbf{A}(t,\mathbf{x}) = (\mathbf{k} + \mathbf{v}\times\mathbf{k})\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - wt),, \quad (t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

が (61) と (60) の真空での特解を与えることを見るのはやさしい．これらを平面波解という．現実は真空ではないが，地上の建造物や水などから十分離れた空中での放送局からの電波等は平面波解で近似できるので (その上，フーリエ変換を通して,「全て」の解を「表せる」ことから) 実用上はしばしば使われる．

4 割愛した項目．

以下の項目はこの講義の対象となりうるキーワードのうちで，この講義録では分量的に不可能と判断して，あるいは筆者の能力の範囲外と判断して，除外した項目である[46]．進んだ講義との連携の際に参考にしていただきたい．

(1) 球面の正射影
(2) 直交曲線座標系，円柱座標系，空間極座標
(3) 微分形式（交代共変テンソル場，座標不変な微分の定義，外積代数，相対空間），全微分方程式
(4) Poisson 方程式，Hermholtz の定理
(5) Poincaré の補題，de Rham の定理

[45] 同値ならば最初からポテンシャルで物理法則を書けばいいと思うかも知れないが，実際の現象では，物質に働く力 (56) として観測されるのは電場 $\mathbf{E}$ や磁場 $\mathbf{B}$ なので，これらで記述したほうが物理現象の研究には見通しがいい．

しかし，原子よりさらに小さい領域の現象を扱う場合には，これらの方程式は現象のよい記述ではなくなり，量子力学という別の方程式を扱わないといけない．そこでは，ポテンシャルで法則を書くのが自然であることが知られている．

[46]「講義の対象となりうる」というのは，具体的には，2001 年，名古屋大学大学院多元数理科学研究科在職時の表現でいう「過去のシラバスの目次に載ったことのある項目」である．

Appendix.

A　復習.

既修の事項（ひょっとしたら未習のものもあるかもしれないが，そこまで立ち入ると本題に戻ってこれないので，認めていただきたい事項）を要約しておく.

A.1　関数の連続性と関数列の収束.

この節では，$\mathbb{R}^d$ の点（ベクトル）を $\mathbf{u}$ と書かずに z などと，また，$\mathbb{R}^{d'}$ 値関数（ベクトル場）を $\mathbf{V}$ と書かず f と書いておく.

$d,\ d'$ を自然数 (空間の次元) とする．集合 $D \subset \mathbb{R}^d$ 上で定義された関数 (ベクトル場) $f:\ D \to \mathbb{R}^{d'}$ と $a \in \overline{D}$ (D の閉包) に対して，$z \to a$ のとき f が極限値 A を持つとは,

$$(\forall \epsilon > 0)\ \exists \delta > 0;\ 0 < \|z-a\| < \delta,\ z \in D,\ \Rightarrow\ \|f(z) - A\| < \epsilon,$$

が成り立つことをいい，$\lim\limits_{z\to a} f(z) = A$ と書く．さらに $a \in D$ ならば $f(a)$ も存在する．このとき，f が a で連続とは $\lim\limits_{z\to a} f(z) = f(a)$ となることをいう．f が D の各点で連続なとき f は D で連続であるという.

連続性の定義において，δ の取り方が，D の点によって共通にとれるとき (ϵ だけで決まり，a によらないようにできるとき)，f は D で一様連続であるという.

定理 32 ([2, §11]) $\mathbb{R}^d$ のコンパクト集合 *(*有界閉集合 *(*定理 *50))* 上で連続な関数は,

(1) そこで一様連続である.

(2) $d' = 1$ ならば *(*即ち実数値関数のならば*)* そこで最大値と最小値を持つ（即ち，有界であって，定義域のいずれかの点でその上限，下限の値を実際に取る）.

領域 $D \subset \mathbb{R}^d$ 上で定義された関数の列 $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と関数 f についての収束の概念が複数ある.

各点収束： $\{f_n\}$ が f に D で各点収束するとは，全ての $z \in D$ に対して数列 $\{f_n(z)\}$ が $f(z)$ に収束すること.

一様収束： $\{f_n\}$ が f に D で一様収束するとは，$\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_D = 0$ となることをいう．ここで，集合 E 上の関数 g に対して $\|g\|_E = \sup\limits_{z\in E} \|g(z)\|$ とおいた.（ $\mathbb{R}^d$ の点 z に対する $\|z\|$ との微妙な違いに注意.）

広義一様収束： $\{f_n\}$ が f に D で広義一様収束するとは，D 内の任意のコンパクト集合上で f_n が f に一様収束すること.（D がコンパクトならば広義一様収束と一様収束は同値．そうでなければ，広義一様収束しても一様収束するとは限らない.）

定理 33 (連続関数の集合の一様収束位相に関する完備性) *(1)* D 上の関数列 $\{f_n\}$ が D 上一様収束することと

$$(\forall \epsilon > 0)\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ n, m \geqq n_0\ \Rightarrow\ \|f_n - f_m\|_D < \epsilon,$$

は同値.

(2) 連続関数の広義一様収束極限は連続関数である.

A.2　テーラーの定理.

$d,\ d'$ を自然数 (空間の次元) とする.

定理 34 (テーラーの定理 [2, §25 定理 29]) 矩形集合 $D \subset \mathbb{R}^d$ 上で定義された実 d 変数実 d' 成分関数 $f\colon\ D \to \mathbb{R}^{d'}$ が n 階微分可能 *($d' > 1$ ならば n 階の全微分まで存在するという意味 [2, §23,24])* ならば, $x \in D$, $h \in \mathbb{R}^d$; $x + h \in D$, に対して

$$f(x+h) = f(x) + (h\cdot D)f(x) + \frac{1}{2!}(h\cdot D)^2 f(x) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}(h\cdot D)^{n-1} f(x) + \frac{1}{n!}(h\cdot D)^n f(x+\theta h), \quad 0 < \theta < 1,$$

を満たす θ が存在する.

例えば $d = 1$ (1 変数関数) ならば

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h),$$

また, $d = 2$, $n = 1$ のとき

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y+\theta k) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta h, y+\theta k).$$

テーラーの定理から, 例えば合成関数の微分法則を得る.

定理 35 全微分可能関数 $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と微分可能関数 $x\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{d\,f(x(t), y(t))}{dt} = \frac{d\,x}{dt}(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + \frac{d\,y}{dt}(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

が成り立つ.
ここで, 左辺は代入してから常微分することを, 右辺は先に偏微分してから代入することを, それぞれ表す. 即ち, 合成関数の微分法則とは代入と微分の順序交換可能定理である.

定理 35 から 2 変数関数の合成関数 (座標変換) の公式も得る.

定理 36 全微分可能関数 $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と偏微分可能関数 $x\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $y\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対して

$$\frac{\partial\,f(x(t,u), y(t,u))}{\partial t} = \frac{\partial\,x}{\partial t}(t,u)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t,u), y(t,u)) + \frac{\partial\,y}{\partial t}(t,u)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t,u), y(t,u))$$

が成り立つ. ここで, 左辺は代入してから微分することを, 右辺は先に微分してから代入することを, それぞれ表す.
y 偏微分も同様である.

テーラーの定理のもう一つの重要な応用に, 陰関数定理がある.

定理 37 ([2, §82 定理 71]) 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ において 2 変数関数 $f\colon\ D \to \mathbb{R}$ が C^1 級で, $P_0 = (x_0, y_0) \in D^o$ で $f_x(P_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) \neq 0$ または $f_y(P_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) \neq 0$ とする. 例えば, $f_y(P_0) \neq 0$ のとき, 方程式 $f(x,y) = f(P_0)$ は P_0 の近くで y について次の意味で一意的な解 $y = \phi(x)$ を持つ：x_0 のある近傍が存在して, そこで連続で $f(x, \phi(x)) = f(P_0)$ を恒等的に満たす $y = \phi(x)$ が一意的に存在（従って, 特に, $\phi(x_0) = y_0$）する.
しかも, このとき, ϕ は微分可能である（従って, 必然的に $\phi'(x) = -\dfrac{f_x}{f_y}(x, \phi(x))$ を満たす）.
もし, f が C^r 級ならば ϕ も C^r 級である.

1 変数の C^1 級関数 $g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して $f(x,y) = y - g(x)$ とおくと, 定理 37 から 1 変数関数の逆関数定理を得る.

定理 38 $g\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が x_0 を含む開区間で C^1 級関数で $g'(x_0)\neq 0$ ならば，$y=g(x)$ の逆関数 $x=g^{-1}(y)$ が $g(x_0)$ を含む開区間で存在して，その導関数 $g^{-1\prime}$ は g の導関数 g' を用いて

$$g^{-1\prime}(y)=\frac{1}{g'(g^{-1}(y))}$$

と書ける．とくに g^{-1} はそこで C^1 級である．

もし g が C^r 級ならば g^{-1} も C^r 級である．

一般に $2n$ 変数の陰関数定理から，n 変数の逆関数定理を得ることができるはずである．(たしか [2] ではそうやっていたと思う．但し，もうちょっと少ない変数でもできたはずである.)

ちなみに， 2 変数関数の逆関数定理は次のようになる．

定理 39 $g\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が (x_0,y_0) を含む開近傍で C^1 級関数で

$$\det\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x_0,y_0)\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x_0,y_0)\end{vmatrix}\neq 0$$

ならば， g の逆関数が $g(x_0,y_0)$ の近傍で存在して C^1 級である．

もし g が C^r 級ならば逆関数も C^r 級である．

A.3 リーマン積分．

A.3.1 1 次元積分．

Δ が閉区間 $[a,b]$ の分割であるとは，自然数 n と $[a,b]$ の長さ $n+1$ の点列 $a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$ があって $\Delta=\{t_0,\cdots,t_n\}$ であることをいう．このとき $|\Delta|=\sup\limits_{i\in\{1,\cdots,n\}}(t_i-t_{i-1})$ を分割 Δ の幅という．$\Delta\subset\Delta'$ のとき Δ' を Δ の細分という．

定理 40 (Darboux [2, §30]) 閉区間 $[a,b]$ 上で定義された実数値関数 $f\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ が有界ならば，

$$\sup_{\Delta}\sum_{i=1}^{n}(\inf_{\{\xi_i\}}f(\xi_i))(t_i-t_{i-1}))\ =\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\inf_{\{\xi_i\}}f(\xi_i))(t_i-t_{i-1}),\tag{62}$$

および，

$$\inf_{\Delta}\sum_{i=1}^{n}(\sup_{\{\xi_i\}}f(\xi_i))(t_i-t_{i-1}))=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\sup_{\{\xi_i\}}f(\xi_i))(t_i-t_{i-1}),\tag{63}$$

が成り立つ．ここで左辺は Δ が $[a,b]$ の分割全体を動き，代表点 $\{\xi_i\}$ が $t_{i-1}\leqq\xi_i\leqq t_i,\ 1\leqq i\leqq n,$ を満たす範囲で動くときの上限 *(*下限*)* の意味．

即ち，問題の量の上限や下限は分割の幅が 0 に近づく極限として実現する（しかも 0 への近づき方によらない）.

証明. [2, §30] の証明を日本語で説明しておく．

(63) も同様なので (62) のみ証明する．

三角不等式 $|t_i-t_{i-1}|\leqq|t_i-t'|+|t'-t_{i-1}|$ によって，右辺の sup の中身は細分をとれば非減少なので，sup は $|\Delta|\to 0$ で起きる．よって論点は， $|\Delta|\to 0$ の近づき方に無関係に一定値に近づくこと ($\lim_{|\Delta|\to 0}$ の存在) である．

$|\Delta|\to 0$ の極限が存在しないとすると，分割の幅が 0 に収束する 2 つの分割列 $\{\Delta_n\}$, $\{\Delta'_n\}$ があって，$\{\Delta'_n\}$ に対する右辺が小さくとれるはず．すると，ある n_0 がとれて $\{\Delta_{n_0}\}$ に対する (62) の右辺の sup の中身は，$\{\Delta'_n\}$ に対する右辺 sup より真に大きいはず．しかし， $\{\Delta'_n\}$ おける n を十分大きくとって，分割幅を $1/n_0$ より十分小さくとる (f が有界なので，その大きさで割る) と，三角不等式と $\{\Delta_{n_0}\}$ の分点付近の誤差評価から，$\{\Delta'_n\}$ に対する右辺 sup は $\{\Delta_{n_0}\}$ に対する右辺の sup の中身 (以上の値に) いくらでも近づけられるので，矛盾．よって $|\Delta|\to 0$ の極限が存在する． □

注 44 $d(x,y)$ が三角不等式 $d(x,y) \leqq d(x,z) + d(z,y)$ と一様連続性 $\lim_{\epsilon\downarrow 0} \sup_{(x,y);\ |x-y|\leqq\epsilon} d(x,y) = 0$ を満たせば（例えば連続関数 u に対して $d(x,y) = |u(x) - u(y)|$），*(62)* 右辺で $t_i - t_{i-1}$ を $d(t_i, t_{i-1})$ に置き換えても同じ証明が成り立つ.

証明を工夫し直して，共通細分との差を考える方法に代えれば，$d(x,y)$ が有界変動であれば十分ということも分かる．この考察は，部分積分の一般化となる *Riemann-Stieltjes* 積分に至る．

$\diamond$

閉区間上の連続関数は一様連続 (定理 32) なので (62) と (63) が一致する．よって次を得る．

定理 41 ([2, §30 定理 31]) 有界閉区間上区分的に連続な関数のリーマン積分は存在する．即ち，有界閉区間 $[a,b]$ 上で定義された実数値関数 $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ がで区分的に連続ならば,

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

が *(*有限値で*)* 存在する（分割 Δ の列や代表点 $\{\xi_i\}$ の列の取り方によらない）.

この極限値を $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ と書いて *(*リーマン*)* 積分と呼ぶ.

関数 $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して $F' = f$ となる $F\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (があるときそれ) を f の原始関数という．微分可能な関数 u があるとき u は $\dfrac{du}{dt}$ の原始関数である.

命題 42 (微積分法の基本公式 [2, §32]) f が連続で F がその原始関数ならば $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

定積分の積分範囲に関する加法性から 命題 42 の逆も容易である.

定理 43 ([2, §32 定理 35]) $f(t)$ が 1 点 $t = x$ で連続ならばその積分関数 $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(t)\,dt$ は $t = x$ で微分可能で $F'(x) = f(x)$.

一様収束 (§A.1) と積分の概念を組み合わせると，積分とパラメータに関する微分の交換定理を得る.

定理 44 ([2, §48]) 2 変数関数 $f\colon\ [a,b] \times [\alpha_1, \alpha_2] \to \mathbb{R}$ が連続関数ならば $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ の関数 $F(\alpha) = \displaystyle\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ は連続関数で，さらに，$\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ が連続関数ならば $F'(\alpha) = \displaystyle\int_a^b f_\alpha(x,\alpha)\,dx$ である.

A.3.2 重積分.

$D \subset \mathbb{R}^2$ 上の関数 $f\colon\ D \to \mathbb{R}$ の積分 (重積分) も 1 次元積分と同様に定義される [2, §90–93].

Δ が有界閉領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ の分割であるとは，自然数 m, n と，D を覆う矩形 $[a,b] \times [c,d]$ に対して点列 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$ と $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$ があって，$\Delta = (\{x_0, \cdots, x_m\}, \{y_0, \cdots, y_n\})$ であることをいう．このとき $|\Delta| = \max\{\max_{i\in\{1,\cdots,m\}}(x_i - x_{i-1}), \max_{j\in\{1,\cdots,n\}}(y_j - y_{j-1})\}$ を分割 Δ の幅という.

定理 45 (Darboux [2, §90]) 有界閉領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された実数値関数 $f\colon\ D \to \mathbb{R}$ が有界ならば,

$$\sup_{\Delta,\{\xi_{i,j}\}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (\sup_{\{\xi_{i,j}} f(\xi_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$

および,

$$\inf_{\Delta,\{\xi_{i,j}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (\inf_{\{\xi_{i,j}} f(\xi_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$

が成り立つ．ここで左辺は Δ が D の分割全体を動き，各代表点 $\xi_{i,j} \in \mathbb{R}^2$ を $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \cap D$ からとるときの上限 *(*下限*)* の意味．ただし，$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \cap D = \emptyset$ なる小矩形からの寄与は 0 とする *(*あるいは $f(\xi_{i,j}) = 0$ と定義する*)*.

定理 46 ([2, §92]) 有界閉領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ の境界 ∂D が面積 0，即ち，∂D は任意に総面積の小さな小矩形群でおおえるとする．また，D 上で定義された実数値関数 $f:\ D \to \mathbb{R}$ はその不連続点の集合が同じ意味で面積 0 とする．このときリーマン積分 $\displaystyle\int_D f(x,y)\,dxdy$ が存在する．

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

特に $f(x,y)$ を恒等的に 1 としたときの積分値を D の面積という．

重積分は，適当な条件の下で 1 次積分の繰り返し (逐次積分) で書ける．

定理 47 ([2, §93]) $D \subset \mathbb{R}^2$ が $a \leqq b$ と $\phi_1(x) \leqq \phi_2(x)$, $a \leqq x \leqq b$, を満たす $a, b \in \mathbb{R}$ と $\phi_i:\ [a,b] \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, を用いて

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi_1(x) \leqq y \leqq \phi_2(x),\ a \leqq x \leqq b\}$$

と書けるとする（例えば，矩形や円）．$f:\ D \to \mathbb{R}$ は有界かつ積分可能で，また，$\displaystyle\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy$ が各 $a \leqq x \leqq b$ に対して存在するならば，

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

定理 48 ([2, §96]) 有界閉領域 $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ が面積 $\Omega' = \displaystyle\int du\,dv$ を持つとする．変数変換 $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ が有界閉領域 $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ で C^1 級で，ヤコビ行列式 $|J|(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}(u,v)$ が Ω' で 0 にならないとする．このとき $\Omega = \{(x(u,v), y(u,v)) \in \mathbb{R}^2 \mid (u,v) \in \Omega'\}$ とおくと，Ω も面積を持ち，

$$\Omega = \int_\Omega dx\,dy = \int_{\Omega'} |J|(u,v)\,du\,dv$$

で与えられる．また，$\displaystyle\int_{\Omega'} du\,dv = |\Omega'|$ とおき，Ω' の直径を ρ とするとき，$(u,v) \in \Omega'$ を満たしながら $\rho \to 0$ とすると，

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{|\Omega|}{|\Omega'|} = |J|(u,v).$$

さらに，$f:\ \Omega \to \mathbb{R}$ が積分可能ならば，

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} f(x(u,v), y(u,v))\,|J|(u,v)\,du\,dv$$

A.4 線型代数．

A.4.1 線型空間．

$\mathbb{R}^2$ は実線型空間 (実ベクトル空間) の構造を持つ．即ち，実数の四則に基づいて，$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ によって $\mathbb{R}^2$ の加法，$r\,(u_1, u_2) = (ru_1, ru_2)$ によって $\mathbb{R}^2$ のスカラー (実数) 倍，がそれぞれ定義できる．線型空間は加法に関して（線型空間の定義から）可換群をなす．その零元は $\mathbb{R}^2$ では $(0,0)$，逆元は $-(u_1, u_2) = (-u_1, -u_2)$．ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の要素，という意味で，$\mathbb{R}^2$ の要素をベクトルという．(つまり，単に $\mathbb{R}^2$ の要素のことだが，実数倍や他のベクトルとの足し算を意識しているときにベクトルという.）同じ理由で $\mathbb{R}^3$ の要素もベクトルというので，区別するときは 2 次元ベクトル，あるいは，平面ベクトルという．

$\mathbb{R}^n$ は内積 $(u_1, \cdots, u_n) \cdot (v_1, \cdots, v_n) = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$ という双線型可換な演算 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を持つ線型空間である．

内積に対して $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$ によって定義された量をベクトルのノルム (大きさ) という．ノルムとは，$\|\mathbf{u}\| \geqq 0$, $\|r\mathbf{u}\| = |r|\,\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leqq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$, $\|\mathbf{u}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$，という性質を持つ実数値関数である．

一般に，集合 $\mathcal{V}$ が (体 K 上の) 線型空間であるとは，加法 (可換群) と「K 倍する」という操作がその上で定義されていて，分配則および，K の演算との整合性が成り立っていることをいう．この講義では $K = \mathbb{R}$ の場合しか扱わないので，以下 $K = \mathbb{R}$ とおく．$v_1, \cdots, v_k \in \mathcal{V}$ が一次独立とは，$a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ に対して $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k = 0$ となるのは $a_1 = \cdots = a_n = 0$ しかない，ときをいう．例えば $\mathbb{R}^2 \ni (1,0), (0,1)$ は一次独立である．線型空間が n 次元であるとは，n 個要素からなる一次独立な組があるが，$n+1$ 個の要素はどうとっても一次従属である (一次独立でない) ことをいう．

内積とは，双線型 (K が複素体のときは一方は共役線型) な 2 変数実数値関数 $(\cdot,\cdot) :\ \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathbb{R}$ であって，$(\mathbf{u},\mathbf{u})$ が非負で，かつ，0 になるのは $\mathbf{u} = 0$ のときに限る，という性質を満たすものをいう．内積を持つ n 次元線型空間では，その内積に関する正規直交基底，即ち，$\mathbf{e_i}\cdot\mathbf{e_j} = \delta_{ij}$, $i,j = 1,\cdots,n$, を満たす $\mathbf{e_i}$, $i = 1,\cdots,n$, が，存在する．n 次元という言葉の定義から，このとき，全ての $\mathcal{V}$ の要素は正規直交基底の線形結合で一意的に表すことができる．このことから，$\mathcal{V}$ と $\mathbb{R}^n$ の間に $1:1$ で線型演算を保つ対応が存在する．そのときの係数 $(a_1,\cdots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ をそのベクトルの座標という．正規直交基底を取り替えればこの $1:1$ 対応 (座標表示) は変わる．これを $\mathcal{V}$ の座標変換と (この講義では) 呼ぶことにする．

A.4.2　行列．

n, m を 2 以上の整数とする．n 行 m 列の行列の階数 (rank) が 2 とは行と列から 2 つずつ選んで 2×2 部分行列 (小行列) を取り出すとき，そのような ${}_n\mathrm{C}_2 \times {}_m\mathrm{C}_2$ 個の小行列のうち少なくとも 1 つはその行列式が 0 でないこと，即ち，その小行列が逆行列を持つことをいう．

行列の rank とその行列の各列の作るベクトルの組の独立性 (§A.4.1) には関係がある．簡単のために (かつ，本文で使うために) rank 2 の 2 列の行列で関係を示す．

命題 49 *$n \geqq 2$ を整数とする．n 行 2 列の行列 $A = (a_{ij})$ が rank 2 であることと，A の 2 つの列が作る 2 つの列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$ が一次独立であることは同値である．*

A.5　位相．

[1, 14B,N,O] 等に従い，以下を用意しておく．

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 D をとる．内点，内部 D^o，外点（補集合の内点），外部 $(D^c)^o$，境界点（内点でも外点でもない点），境界 ∂D．孤立点（内点に由来しないが，よく使う概念）．

位相的に特別重要な集合として，開集合 ($D = D^o$) と閉集合 ($D^c = (D^c)^o$) がある．

「点 c と集合 E が与えられたとき，$r > 0$ をどのように小さくとっても $\Delta(c,r) \cap (E \setminus \{c\}) \neq \emptyset$ 」であるときに c を E の集積点という．

$\setminus\{c\}$ は孤立点を集積点の定義から除くことを意味する．また，D の外の点でも集積点になりうる．

集積点全てからなる集合を導集合，元の集合と導集合の和集合を閉包 $\overline{D}$，という．集合 D がコンパクトとは，任意の開被覆に対して，有限個を取り出して D の被覆とできるときをいう．

集合 $D \subset \mathbb{R}^n$ に関して以下のことが知られている．(最後の性質を除けば定義から自力で導けるであろう)．

定理 50 *(1) $z \in \mathbb{R}^n$ について，z が D の集積点であることと $z \in \overline{D \setminus \{z\}}$ となることは同値．*
(2) $\overline{D} = ((D^c)^o)^c$,
(3) 孤立点の集合は元の集合のうち導集合に入っていない点の集合に一致．
(4) $\partial D = \overline{D} \cap \overline{D^c}$.
(5) $D^o = D \setminus \partial D$.
(6) $(D^c)^o = \overline{D}^c = D^c \setminus \partial D$

(7) D が閉集合であることと $D=\overline{D}$ は同値.（自力で証明を試みるならば，中間段階として，D の任意の収束する点列の極限が D に入ることと同値であることを示してもよい.）

(8) D がコンパクトであることの必要十分条件は有界閉集合であること.（ボルツァノワイエルシュトラウスの定理）.

$D \subset \mathbb{R}^n$ の部分集合 $S \subset D$ が (D に) 相対的な開集合 (D の開集合) とは，$\mathbb{R}^n$ の開集合 O が存在して $S = D \cap O$ と書けるときをいう．$D \setminus S$ が D の開集合のとき S を D の閉集合という.

D が連結とは，D の空でない開集合 A, B で $D = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ なるものがないこと．連結な開集合を領域という.

定理 51 領域 D の任意の 2 点は D の折れ線 *(曲線)* で結べる（即ち，弧状連結である）.

位相とは別の注目点を含むが，この講義で重要な概念として単連結がある．集合 $D \subset \mathbb{R}^n$ が単連結とは，D に含まれる任意の Jordan 閉曲線 C に対して C の内部が D に含まれること（穴が開いていないこと）をいう.（特に， D の境界 ∂D が Jordan 閉曲線ならば，∂D の内部が D に含まれること，ということと同値.）

B 関数のゼロ点が定める領域.

関数のゼロ点が定める領域について，§A.2，特に 定理 37 の応用例を紹介する ([5, 定理 1.31, 定理 2.4, 補題 2.7])．本文で紹介する余裕がないことと，本文とは独立した話題なので，Appendix に回した．定義や記号は §1.4.2, §2.2.1, §2.2.2 を参照.

定理 52 $\mathbb{R}^2$ **の場合：** 領域 $D \in \mathbb{R}^2$ の上の C^1 級のスカラー場 $f:\ D \to \mathbb{R}$ と実数 c に対して，$C = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid f(P) = c\}$ とおく．もし $\operatorname{grad} f(P) \neq 0,\ P \in C,$ ならば， C は滑らかな曲線の和集合である．特に D が有界ならば，有限和である.

$\mathbb{R}^3$ **の場合** ($D = \mathbb{R}^3$, $c = 0$)**：** 3 変数 C^1 級関数 $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対して，$S = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid f(P) = 0\}$ とおく．もし $\operatorname{grad} f(P) \neq 0,\ P \in S,$ ならば，S は曲面である.

さらに $P \in S$ における S の接平面は $T_P(S) = \{P + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v} \cdot (\operatorname{grad} f)(P) = 0\}$ で与えられ，法ベクトルは $\operatorname{grad} f(P)$ *(の実数倍)* で与えられる.

証明. $\mathbb{R}^2$ **の場合：** $P = (x, y) \in D$ を一つとる．$\operatorname{grad} f(P) \neq 0$ だから，例えば $f_y(P) \neq 0$ とする（$f_x(P) \neq 0$ の場合も同様）．定理 37 から，$\delta_1, \delta_2 > 0$ と微分可能な関数 $\phi:\ (x - \delta_1, x + \delta_2) \to \mathbb{R}$ が存在して，$\{Q \in C \mid \|Q - P\| < \epsilon\} = \{(t, \phi(t)) \mid t \in (x - \delta_1, x + \delta_2)\}$ となる．f が C^1 級，即ち，$\operatorname{grad} f$ が連続だから，$\phi' = -\dfrac{f_x}{f_y}$ も連続，即ち，$t \mapsto (t, \phi(t))$ は $1:1$ の滑らかなパラメータ表示．よって，主張は次の補題補題 53 から従う.

$\mathbb{R}^3$ **の場合：** 他も同様なので，$\dfrac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0$ とする．$P = (x_0, y_0, z_0)$ とすると，陰関数定理から，(x_0, y_0) を含む開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞ 級 2 変数関数 $g:\ U \to \mathbb{R}$ が存在して，$f(x, y, g(x, y)) = 0$, $(x, y) \in U$．この g に対して $\varphi(s, t) = (s, t, g(s, t))$, $(s, t) \in U$, とおけば，φ は作り方から， P の近傍を含む $f = 0$ で定義された集合のパラメータ表示であって，曲面の定義の φ の条件 (§2.2.1) を全て満たす.

S の P の近傍でのパラメータ表示 $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$ において $P = \varphi(s_0, t_0)$ とおく．S の定義から $f(\varphi(s, t))$ は恒等的に 0 だから，合成関数の微分法則定理 35 から，$(\operatorname{grad} f) \circ \varphi\, D\varphi = 0$ が恒等的に成り立つ．ここで $D\varphi$ はヤコビ行列 (§2.2.1)．$T_P(S)$ は $D\varphi(s_0, t_0)$ の 2 つの列ベクトルで張られるから，$\operatorname{grad} f(P)$ は法ベクトルである (§2.2.1)．即ち，接ベクトル は $\mathbf{v} \cdot (\operatorname{grad} f)(P) = 0$ を満たす $\mathbf{v}$ である.

□

補題 53 $C \subset \mathbb{R}^2$ について次の 2 つは同値

(1) C は滑らかな曲線の和集合.
(2) 任意の $P \in C$ に対して $\{Q \in C \mid \|Q - P\| < \epsilon\}$ が滑らかな開曲線であるような $\epsilon > 0$ が存在する.

証明. コンパクトと有界閉集合が $\mathbb{R}^n$ で同値であるという事実 (定理 50) から従う.

□

参考文献

[1] 日本数学会編，岩波数学辞典第３版，岩波書店，1985.

[2] 高木貞治，解析概論，岩波書店，第５章.

[3] ファインマン，電磁気学，岩波書店.

[4] 安達忠次，ベクトル解析，培風館.

[5] 深谷賢治，電磁場とベクトル解析，現代数学への入門 17，岩波書店.

[6] フランダース，岩堀長慶訳，微分形式の理論，岩波書店.

[7] 戸田盛和，電磁気学３０講，朝倉書店.

[8] 岩堀長慶，ベクトル解析，裳華房.

[9] 泉屋・石川，応用特異点論，共立出版.

[46] 2001 年，名古屋大学大学院多元数理科学研究科在職当時の記述によれば，名古屋大学での過去の講義の教科書・主要参考書は以下の通りである.

平成 12　藤原一宏 [5, 3]

平成 11　中西敏浩 [8, 4]

平成 10　太田啓史 [5, 6, 7]