ベクトル解析　第１回試験について

火曜３限－　服部哲弥

2001/10/26

11/13 (火曜) 13:00 から通常の講義室 509 で第１回試験を行う．持ち込みなし．

試験は１時間程度の予定なので，遅刻を絶対にしないように．

試験範囲は，講義録の §1.1–1.3 (平面ベクトル場，線積分，grad)，および対応する演習問題集の範囲全部，を原則とするが，実際は，演習問題集の問題を中心に（問題集そのままという意味ではない），各小節からまんべんなく出題する予定である．

不可抗力による試験欠席の場合は，文書による証明を服部まで提出すること．このとき，何らかの対処が妥当と判断される場合でも，無理を押して正規の時間に受験する諸君との公平のため，単位取得最低点に相当する点を上限とする．
間違った採点の訂正は行うので，疑問のある場合は問い合わせていただきたい．但し，ほかの諸君に対する誤った採点に基づいて正しく採点された答案の成績を変えることはしない．

毎回の演習に相当する時間の出席点に代えてレポートを提出してもらっていることは講義初回に説明したとおりである．単位取得希望者は必ずレポートを提出すること．出席して，黒板で発表すればより望ましいことは言うまでもない．
現在，配布した演習問題集の問 [73][5] が出題済みである．

なお，10/30 は出張のため休講とする．

問い合わせ先：hattori@math.nagoya-u.ac.jp 服部哲弥

ベクトル解析　第１回試験

2001/11/13 服部哲弥

問 1，問 2，問 3 をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

1 (30).　以下で定義される平面ベクトル場をそれぞれ図示せよ．

(i) $\vec{V}(x,y)=(x,y)$
(ii) $\vec{V}(x,y)=(y,-x)$
(iii) $\vec{V}(x,y)=(-y,x)$

2 (40).　C を始点 $(0,0)$ から終点 $(1,1)$ への区分的に滑らかな曲線とするとき，以下のそれぞれのベクトル場 $\vec{V}$ について，線積分 $\int_C \vec{V}(\vec{u})\cdot d\vec{u}$ の**値が**積分路 C の形によって**異なる場合があるものを２つ選び**，具体的な例（積分値が異なる２つの積分路）を書いてそれぞれの積分値を計算せよ．（他の２つについては積分路によらないことを証明する必要はない．）

(i) $\vec{V}(x,y)=(x,0)$
(ii) $\vec{V}(x,y)=(y,0)$
(iii) $\vec{V}(x,y)=(y,x)$
(iv) $\vec{V}(x,y)=(-y,x)$

3 (30).

(i) $\vec{V}(x,y)=(y,x)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, は勾配ベクトル場であることを示せ．
(ii) $\vec{V}(x,y)=(-y,x)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, は勾配ベクトル場でないことを示せ．

ベクトル解析　第１回試験　**略解**　2001/11/14 服部哲弥

1 (30). 以下で定義される平面ベクトル場をそれぞれ図示せよ．$\vec{V}(x,y)=(x,y)$, $\vec{V}(x,y)=(y,-x)$, $\vec{V}(x,y)=(-y,x)$

(i) 各点で原点から放射状に外向きのベクトル．原点からの距離に比例して大きい．

(ii) 各点で原点を中心としたとき時計回り向きのベクトル．原点からの距離に比例して大きい．

(iii) 上と類似の図だが反時計回り．

2 (40). C を始点 $(0,0)$ から終点 $(1,1)$ への区分的に滑らかな曲線とするとき，以下の $\vec{V}$ について，$\int_C \vec{V}(\vec{u})\cdot d\vec{u}$ が C によって異なる場合があるものを２つ選び，具体的に例示せよ．
$\vec{V}(x,y)=(x,0)$, $\vec{V}(x,y)=(y,0)$, $\vec{V}(x,y)=(y,x)$, $\vec{V}(x,y)=(-y,x)$

例えば，C_1 を $(0,0)$ から $(1,0)$ への線分と $(1,0)$ から $(1,1)$ への線分をつないだものとし，C_2 を $(0,0)$ から $(0,1)$ への線分と $(0,1)$ から $(1,1)$ への線分をつないだもの，とする．それぞれのパラメータ表示を**例えば**，C_1 については $\vec{u}(t)=\begin{cases}(t,0), & 0\le t\le 1,\\ (1,t-1), & 1\le t\le 2,\end{cases}$
C_2 については $\vec{u}(t)=\begin{cases}(0,t), & 0\le t\le 1,\\ (t-1,1), & 1\le t\le 2,\end{cases}$ とする．

$\vec{V}(x,y)=(y,0)$ について，C_1 上では $\vec{V}(\vec{u}(t))=(0,0)$, $0\le t\le 1$, $=(t-1,0)$, $1\le t\le 2$, となり，C_2 については $\vec{V}(\vec{u}(t))=(t,0)$, $0\le t\le 1$, $=(1,0)$, $1\le t\le 2$, となるので，

$$\int_{C_1}\vec{V}(\vec{u})\cdot d\vec{u}=\int_0^1(0,0)\cdot(1,0)dt+\int_1^2(t-1,0)\cdot(0,1)dt=0,$$
$$\int_{C_2}\vec{V}(\vec{u})\cdot d\vec{u}=\int_0^1(t,0)\cdot(0,1)dt+\int_1^2(1,0)\cdot(1,0)dt=1.$$

$\vec{V}(x,y)=(-y,x)$ について，C_1 上では $\vec{V}(\vec{u}(t))=(0,t)$, $0\le t\le 1$, $=(-(t-1),1)$, $1\le t\le 2$, C_2 については $\vec{V}(\vec{u}(t))=(-t,0)$, $0\le t\le 1$, $=(-1,t-1)$, $1\le t\le 2$, となるので，

$$\int_{C_1}\vec{V}(\vec{u})\cdot d\vec{u}=\int_0^1(0,t)\cdot(1,0)dt+\int_1^2(-(t-1),1)\cdot(0,1)dt=1,$$
$$\int_{C_2}\vec{V}(\vec{u})\cdot d\vec{u}=\int_0^1(-t,0)\cdot(0,1)dt+\int_1^2(-1,t-1)\cdot(1,0)dt=-1.$$

3 (30).

(i) $\vec{V}(x,y)=(y,x)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, は勾配ベクトル場であることを示せ．
(ii) $\vec{V}(x,y)=(-y,x)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, は勾配ベクトル場でないことを示せ．

(i) $f(x,y)=xy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, とおくと，$(\mathrm{grad}\,f)(x,y)=\vec{V}(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, となるので，$\vec{V}$ は勾配ベクトル場である．

(ii) $(\mathrm{grad}\,f)(x,y)=\vec{V}(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, が成り立つ関数 (スカラー場) f があるとすると，$\dfrac{\partial V_1}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial V_2}{\partial x}(x,y)$ が成り立つはずだが，左辺は恒等的に -1，右辺は恒等的に 1，なのでこれは成り立たない．