ベクトル解析　期末試験

2002/01/22 服部哲弥

問 1，問 2，問 3，問 4 をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

講義で取り上げた定理など，例えば，２次元と３次元の Green，Stokes，Gauss，の各定理や，ポテンシャルの存在 (勾配ベクトル場であること) の必要十分条件，は証明せずに使ってもよいが，使った事実を明確にして解答すること．

1 (30)．　次の式で定義される $\mathbb{R}^2$ 上の (２次元) ベクトル場 $\vec{V}$ が勾配ベクトル場であることを証明せよ．

$$\vec{V}(x,y) = (2f(x,y), f(x,y)),\quad \text{ただし}\quad f(x,y) = \frac{e^{2x+y}}{e^{4x+2y}+1}\,.$$

2 (30)．　放物線 $y = x^2 - 3x + 2$ に沿って点 $(1,0)$ から点 $(0,2)$ までの曲線を C とおくとき，問 1 のベクトル場 $\vec{V}$ に対して線積分 $\displaystyle\int_C \vec{V}(\vec{u})\cdot d\vec{u}$ を計算せよ．

3 (30)．　対応

$$(s,t) \mapsto ((2 + t\cos\frac{s}{2})\,\sin s,\ (2 + t\cos\frac{s}{2})\,\cos s,\ t\sin\frac{s}{2})$$

を定義域 $U_1 = \{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \mid -\pi < s < \pi,\ |t| < 1\}$ で考えたものを $\varphi_1:\ U_1 \to \mathbb{R}^3$，定義域 $U_2 = \{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \mid \dfrac{1}{2}\pi < s < \dfrac{5}{2}\pi,\ |t| < 1\}$ で考えたものを $\varphi_2:\ U_2 \to \mathbb{R}^3$，とし，パラメータ系 $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ が定める３次元空間内の曲面 (メビウスの帯) を S とおく．

S は向き付け可能か？即ち，$\vec{n}:\ S \to \mathbb{R}^3$ なる連続写像で，

$$|\vec{n}(\varphi_i(s,t))| = \left| \frac{\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial s}\times\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t}}{\left\|\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial s}\times\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t}\right\|}(s,t)\right|,\quad (s,t)\in U_i,\quad i = 1,2,$$

を満たすものはあるか？理由をつけて答えよ．

4 (30)．　３次元空間内の曲面 $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z = 1,\ z > -3\}$ と３次元ベクトル場 $\vec{V}(x,y,z) = (3yz + 7y + x, y, z + 3)$ に対して面積分 $\displaystyle\int_S \vec{V}\cdot\vec{n}dS$ を計算せよ．($\vec{n}$ は単位法ベクトル.)

ベクトル解析　期末試験　**略解**　　　　2002/01/30 服部哲弥

1 (30). $\vec{V}(x,y)=(2f(x,y),f(x,y))$, $f(x,y)=\dfrac{e^{2x+y}}{e^{4x+2y}+1}$, で定義される $\vec{V}$ が勾配ベクトル場であることを証明せよ．

$g(z)=\dfrac{e^z}{e^{2z}+1}$ とおくと $f(x,y)=g(2x+y)$ なので

$$\mathrm{rot}\,\vec{V}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial 2f}{\partial y}(x,y)=g'(2x+y)\times 2-2g'(2x+y)=0\,.$$

単連結領域 $\mathbb{R}^2$ の各点で回転が 0 となる C^1 級ベクトル場なので勾配ベクトル場である．

（別解複数あり．別解１：線積分が経路によらないことを示す．別解２：ポテンシャルを具体的に求める．）

2 (30). 放物線 $y=x^2-3x+2$ に沿って点 $(1,0)$ から点 $(0,2)$ までの曲線を C とおくとき，問 1 のベクトル場 $\vec{V}$ に対して線積分 $\int_C \vec{V}(\vec{u})\cdot d\vec{u}$ を計算せよ．

$\vec{V}$ は $\mathbb{R}^2$ 上勾配ベクトル場だから線積分 $\displaystyle\int_C \vec{V}(\vec{u})\cdot d\vec{u}$ は始点 $(1,0)$ と終点 $(0,2)$ だけで決まり途中の経路によらない．そこで C' として $(1,0)$ から $(0,2)$ を結ぶ線分をとり，そのパラメータ表示を

$$\vec{u}(t)=(x(t),y(t))=(1-t,2t),\quad 0\le t\le 1,$$

ととれば，$\dfrac{d\vec{u}}{dt}(t)=(-1,2)$ である．よって

$$\int_C \vec{V}(\vec{u})\cdot d\vec{u}=\int_{C'}\vec{V}(\vec{u})\cdot d\vec{u}=\int_0^1(2f(x(t),y(t)),f(x(t),y(t))\cdot(-1,2)dt=\int_0^1 0dt=0.$$

（問 1 でポテンシャルを求めた場合，ポテンシャルの差を計算する別解あり．）

3 (30). メビウスの帯は向き付け可能か？

向き付け可能とすると，$t=0$ (帯の中心線) で

$$\vec{n}(\varphi_i(s,0))=\pm(-\sin s\,\sin\frac{s}{2},\,-\cos s\,\sin\frac{s}{2},\,\cos\frac{s}{2}),\ (s,0)\in U_i\,.$$

$U_1\cap U_2\ni(\frac{3}{4}\pi,0)$ なので，$\vec{n}$ が S 上で一意的に決まるためには $\vec{n}(\varphi_1(\frac{3}{4}\pi,0))=\vec{n}(\varphi_2(\frac{3}{4}\pi,0))$ とならなければならない．これから複号は $i=1,2$ で共通でなければならない．ところが，$\varphi_1(0,0)=\varphi_2(2\pi,0)$ なので $\vec{n}(\varphi_1(0,0))=\vec{n}(\varphi_2(2\pi,0))$，即ち，$(0,0,\pm1)=(0,0,\mp1)$ となり，どちらの符号をとっても矛盾．よって向き付け不可能である．

4 (30). 3 次元空間内の曲面 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid 4x^2+y^2+z=1,\ z>-3\}$ と 3 次元ベクトル場 $\vec{V}(x,y,z)=(3yz+7y+x,y,z+3)$ に対して面積分 $\int_S \vec{V}\cdot\vec{n}dS$ を計算せよ．($\vec{n}$ は単位法ベクトル．)

円板 $S'=\{(x,y,-3)\mid 4x^2+y^2\le 4\}$ と S の和集合は閉曲面である．これが囲む図形を Ω とするとガウスの定理から

$$\begin{aligned}&\int_S \vec{V}\cdot\vec{n}dS+\int_{S'}\vec{V}\cdot\vec{n}dS=\int_\Omega \mathrm{div}\,\vec{V}\,dx\,dy\,dz=3|\Omega|\\&=3\int_{-3}^1 dz\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}d\theta\,\frac{1}{2}(1-z)r=3\times2\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times8=12\pi.\end{aligned}$$

但し，$\vec{n}$ は外向きにとった．一方 S' の法ベクトルは $(0,0,-1)$ で，そこでは $\vec{V}(x,y,-3)=(-2y+x,y,0)$ なので $\vec{V}\cdot\vec{n}=0$ だから $\displaystyle\int_{S'}\vec{V}\cdot\vec{n}dS=0$．よって $\displaystyle\int_S\vec{V}\cdot\vec{n}dS=12\pi$.

（ガウスの定理を用いず S のパラメータ表示を選んで面積分を計算する別解あり．なお，上記解の体積の計算について，一部の本に，「錘だから体積は底面積かける高さ割る３」という趣旨の解があると聞くが，これは本が誤り．Ω は錘ではなく，体積も底面積かける高さ割る３ではない．）