20050609 木 13:15-14:45　確率論セミナー
講師：　吉田 伸生 氏（京大・理）
題目：　ランダム媒質中のディレクティドポリマーの拡散
概要：　相転移を伴う統計力学の問題では，(i): 相転移が実際に起るパラメーターの値（臨界値）の決定，(ii): 相に典型的な性質を，臨界値を端点とするパラメーター区間全体で示すこと，が研究上の目標に含まれる．講演では，ランダム媒質中のディレクティドポリマーで，媒質からの摂動が弱い相について (i),(ii) に対応する結果を報告する．

joint work with F. Comets

1 Definition.

random walk: $(w_n)_{n\geqq 1}$ SRW on $\mathbb{Z}^d$ on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
random environment（不純物のイメージ）: $\{\eta(n,x) \mid (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d\}$ real i.i.d. on $(H, \mathcal{G}, Q)$;
$e^{\lambda(\beta)} = Q[\exp(\beta\eta(n,x))] < \infty, \forall\beta\in\mathbb{R}$. ここで $\mathcal{G} = \sigma[\eta(x,j), x\in\mathbb{Z}^d,\ j \leqq n]$
polymer measure: $\beta > 0$ と $\eta \in H$ に対して $\mu_n = \mu_{n,\eta} \in \mathcal{P}(\Omega, \mathcal{F})$;
$\mu_n(dw) = \dfrac{1}{Z_n}\exp(\beta\sum_{j=1}^{n}\eta(j, w_j))dP(w)$；$Z_n$: 規格化因子（$w$ indep で $\mu_n(\Omega) = 1$ で決まる）

2 Weak/Strong disorder phase.

$W_n = e^{-n\lambda(\beta)}Z_n$ (Note $Q[W_n] = 1$)

Facts.

(i) $(W_n, \mathcal{G}_n)_{n\geqq 1}$ 平均 1 のマルチンゲール，すなわち，$Q[W_n 1_A] = Q[W_{n+1}1_A], A\in\mathcal{G}_n$.
(ii) Either $Q[W_\infty > 0] = 1$ (weak disorder, WD) or $Q[W_\infty = 0] = 1$ (strong disorder, SD).
（Note $\beta = 0$ のとき SRW になって，$W_\infty = 1$, a.s.）
WD では，(w_n, μ_n) $(n\to\infty)$, すなわち RW w_n の μ_n でみたときの長時間挙動，は元の SRW と本質的に同じ．
SD では，(w_n, μ_n) $(n\to\infty)$ は元の SRW と劇的に異なる．
(iii) (WD) $\Leftrightarrow$ $(W_n)_{n\geqq 1}$ が一様可積分.
（$\Leftarrow$ は一様可積分ならば $W_\infty > 0$ が正の確率で起きないといけないから言える．逆は若干の議論が必要.）
(iv) $d \geqq 3$, β small ならば (WD), Imbrie-Spencer 1988, Bolthausen 1989, ...
$d = 1, 2$, $\beta \neq 0$ ならば (SD), Carmona–Hu 2002, Comets–Shiga–Yoshida 2003
(v) $d \geqq 3$, β large ならば多くの典型例で (SD)（おおむね η が非有界なときは (SD)，例外は 1/2–Bernoulli）

相転移があると期待するが，なかなか $Q[W_\infty = 0]$ の β に関する単調性は分からなかった．半年前にやっと次が決定した．

Theorem 2.1. $d \geqq 3$. $(\infty \geqq)$ $\exists\beta_c > 0$; $\beta < \beta_c$ ならば (WD)，$\beta > \beta_c$ ならば (SD) ◇

$0 < \forall\delta < 1$ 固定する毎に：

$$W_n \to 0, a.s.\ (\text{すなわち } W_\infty = 0, a.s.) \quad\Leftrightarrow\quad Q[W_n^\delta] \to 0$$

右側の量は FKG 不等式によって，β に関する単調性を持つことが分かるので，目的の単調性が分かり，従って相転移が言えた．
（$\beta = \beta_c$ がどちらなのかは未解決.）

3 中心極限定理.

先行結果

Theorem 3.1. (Bolthausen 1989, Song–Zhou 1996)
$d \geqq 3$, $\beta \in I_2 = \{\beta \geqq 0 \mid \lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta) < \log \frac{1}{\pi d}\}$ （ここで，$1 > \pi_d = \mathrm{Prob}[\ (w_n)_{n\geqq 1} \ni 0\ ]$）とすると，

(i) $\sup_n Q[W_n^2] < \infty$，従って §2 で注意した同値条件により (WD) が成立
(ii) $f \in C(\mathbb{R}^d)$ が高々多項式増大のとき

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(f(\frac{w_n}{\sqrt{n}})) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x/\sqrt{d}) e^{-|x|^2/2} dx, \quad Q - a.s. \qquad \text{(CLT:f)}$$

つまり polymer measure の下で拡散係数まで含めて SRW と同じ.

◇

Remark.

(i) I_2 は原点を含む長さ正の区間
(ii) (WD) のためには I_2 は optimal ではない（Birkner 2003）
$\exists \alpha > \log \frac{1}{\pi_d}$; $\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta) < \alpha \ \Rightarrow\ (WD)$
つまり L^2 有界から CLT を得る方法では β に関してぎりぎり ($\beta = \beta_c$) まではいかない.

予告. （Q–a.s. を in prob. 収束まで弱めれば,）$\beta < \beta_c$ 全体で (CLT:f) を示すことができる.

Notations. $W = C([0,1] \to \mathbb{R}^d)$, P^W: Wiener measure with variance $1/d$ （標準ブラウン運動 $/\sqrt{d}$ の分布）
$r_n:\ \Omega \ni w \mapsto (\frac{1}{\sqrt{n}} w_{nt})_{0\leqq t\leqq 1}) \in W$

Theorem 3.2. (WD) $\Rightarrow$ $(\forall F \in C_b(W))$ $\lim_{n\to\infty} \mu_n[F \circ r_n] = P^W[F]$ in Q–probability. 特に (CLT:f) が成立 (in Q–probability). ◇

4 Theorem 3.2 の証明.

Lemma 4.1. Assume (WD). Then $\exists \mu = \mu_\eta \in \mathcal{P}(\Omega, \mathcal{F})$ as follows:

(a1) $\mu_n \to \mu$, weakly, Q–a.s.

(a2) $\lim_{k\to\infty} \sup_m Q[\sup_{A\in\mathcal{F}_m} |\mu_{m+k}(A) - \mu(A)| = 0$

(b1) $Q\mu(\cdot) \ll P$

(b2) $Q\mu^{\otimes 2}(\cdot) \ll P^{\otimes 2}$

◇

特に (b1),(b2) は計算が面倒なので，(a1) の説明だけしておく.

(i) $((w_j)_{j=1}^n, \mu_n)$ は次の transition probability を持つ time inhomogeneous Markov chain;
$$\mu_n(w_{j+1} = y \mid w_i = x) = \frac{1}{2d} e^{\beta\eta(i+1,w_i)-\lambda(\beta)} \frac{W_{i+1,n}^y}{W_{i,n}^x} \qquad (*);$$

$W^x_{i,n} = e^{(n-i)\lambda(\beta)} P^x[\exp(\beta \sum_{j=1}^{n-i} \eta(i+j, w_i))]$

（分配関数で時刻 i までは忘れたもの　→　マルチンゲール収束定理が使えて次を得る：）

(ii) (WD) で $\exists W^x_{i,\infty} = \lim_{n\to\infty} W^x_{i,n} > 0$, Q–a.s.

従って，(*) で $n \to \infty$ として $\mu_\infty(w_{i+1} = y \mid w_i = x)$ が得られる．これを transition probability とする Markov chan が求める μ.

Lemma 4.2. (almost sure CLT: Atlagh–Weber 2000)

$F \in BL(W)$ (bdd Lipschitz), $\{N_k\}_{k \geqq 1} \subset N$; $\inf_k \frac{N_{k+1}}{N_k} > 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1 \leqq k \leqq n} F \circ r_{N_k} = P^W F$, P – a.s. ◇

指数は CLT のものだが，CLT よりはエルゴード定理や大数の法則に近い．証明は直交関数系のラデマッハメンソフの大数の法則などを用いる．

Proposition 4.3. (WD) なら $\lim_{n\to\infty} Q\mu[F \circ r_n] = P^W F$, $(\forall F \in C_b(W))$ ◇

P に対しては SRW だから CLT が成り立つ．また，$Q\mu \ll P$ は分かっていた．しかしこれだけで $Q\mu$ も CLT が成り立つかどうかは分かっていないようである.（LLN は当然伝搬する.）

Proof. $\bar{F} = F - P^W F$ とおく．

(*) $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} Q[\bar{F} \circ r_n] = 0$, $F \in C_b(W)$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} Q[\bar{F} \circ r_n] = 0$, $F \in BL(W)$

一方，$a_n = Q\mu[\bar{F} \circ r_n]$ は有界数列（これが $\to 0$ となることを証明したい）．よって convergent subsequence の subsubsequencea_{N_k} をとって $\inf_k \frac{N_{k+1}}{N_k} > 1$ とできる．

よって Lemma4.2 より $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{F} \circ r_{N_k} \to 0$, P–a.s.

$Q\mu \ll P$ だから $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{F} \circ r_{N_k} \to 0$, $Q\mu$–a.s.

故に $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{N_k} \to 0$. すなわち，極限は subsequence のとりかたによらない．よって $a_n \to 0$. ◇

Theorem 3.2 の証明． $F \in BL(W)$ とする．

示すべきこと

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu_n[\bar{F} \circ r_n] = 0$, in Q–prob.

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu_n[\bar{F} \circ r_n] = 0$, in $L^2(Q)$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu[\bar{F} \circ r_n] = 0$ in $L^2(Q)$ (Lemma 4.1 (a2))

ところが $Q[\mu[\bar{F} \circ r_n]^2] = Q[\mu^{\otimes 2}[\bar{F}(r_n w)\bar{(}r_n \tilde{w})] \to 0$ は Proposition 4.3 と同様.（さきほどのポイントは $Q\mu \ll P$ という点だけだが，Lemma によって $Q\mu^{\otimes 2} \ll P^{\otimes 2}$ も分かっていたから同様に分かる.）

□

critical value β_c が決まったことと CLT が分かったことが今日の話.